Année 2024/25

Khôlle n° 8

semaine du 25 novembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire (partie 2)

• Polynômes de matrices/d'endomorphismes. Sous-espaces $\mathbb{K}[M]$ et $\mathbb{K}[u]$. Relation $PQ(M) = P(M) \times Q(M)$ et $PQ(u) = P(u) \circ Q(u)$. Les éléments de $\mathbb{K}[M]$ (resp. de $\mathbb{K}[u]$) commutent entre eux.

• Polynôme annulateur de M (resp. u). Exemples des symétries, projecteurs, homothéties, nilpotents. Toute matrice carrée admet un polynôme annulateur (non nul). Idem pour les endomorphismes en dimension finie. La dérivation de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

• Si $M \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $M^{-1} \in \mathbb{K}[M]$. Calcul de M^k grâce au reste de la division euclidienne de X^k par un polynôme annulateur de M. Si P est un polynôme annulateur non nul d'une matrice carrée M, alors $\dim \mathbb{K}[M] \leqslant \deg(P)$.

• Sous-espaces stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit, Caractérisation matricielle de l'existence d'un sous-espace stable. Si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont u-stables. En particulier, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont u-stables pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

• Formes linéaires sur un espace vectoriel. Rappels sur l'espace dual E^* et sa dimension si E est de dimension finie. Base duale de E^* associée à une base de E. Une forme linéaire est soit nulle, soit surjective. Description des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$. Si φ et ψ sont des formes linéaires non nulles ayant même noyau, alors elles sont proportionnelles.

• Hyperplans (en dimension quelconque) : il est équivalent de dire qu'un sev est le noyau d'une forme linéaire non nulle ou de dire qu'il est supplémentaire d'une droite. En dimension finie, caractérisation par la dimension « $n-1$ ». Équations d'un hyperplan H dans une base (en dimension finie). Équation d'un hyperplan affine $\mathscr{H} = a + H$ dans une base (en dimension finie).

• Déterminants d'une matrice carrée : il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui soit linéaire par rapport aux colonnes de sa variable matricielle, telle que $\det(M) = 0$ dès que M a deux colonnes égales et telle que $\det(I_n) = 1$. Démonstration pour $n = 2$. Invariance par transposition, par transvection $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ $(i \neq j)$, $\det(\lambda A)$, $\det(AB)$, caractérisation des matrices inversibles, $\det(A^{-1})$. Développement par rapport à une rangée (formule de Laplace), déterminant triangulaire et triangulaire par blocs.

• Déterminant de Vandermonde $\mathscr{V}(x_0, \dots x_n)$ et lien avec la théorie des polynômes interpolateur : c'est la matrice de $P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$, définie sur $\mathbb{K}_n[X]$. Elle est inversible si et seulement si les $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts. Déterminant de Vandermonde.

2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 5}}$: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15.