



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Séries numériques (exercices seulement)

2 Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$

• Fonctions partielles en un point d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Limite/continuité en un point d'une telle fonction. Si f est continue en $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_{k,a}$ est continue en a_k , mais la réciproque est fausse. Dérivées partielles, classe $\mathcal{C}^1$ définie par la continuité des dérivées partielles.

• Théorème de l'approximation affine (démonstration quand $n = 2$). Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est continue. Notion de fonction différentiable en un point. Différentielle de f au point a , notation df_a ou $df(a)$. Il n'existe qu'une seule forme linéaire L sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f(a+h) - f(a) = L(h) + o(\|h\|)$. Exemples de base : fonction constante, restriction d'une forme linéaire, et cas $n = 1$. Propriétés calculatoires : d est linéaire, $d(fg)_a$ et $d\left(\frac{f}{g}\right)_a$ si $g(a) \neq 0$.

• Notions de forme différentielle de degré 1, écriture $P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n$, formes (totales) exactes. Notation « δ » pour les 1-formes non exactes.

• Dérivée d'une composée : $\frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ (*chain rule 1*), dérivées partielles de $f^* : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ (*chain rule 2*). Savoir expliquer l'écriture symbolique $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$. Écriture matricielle avec la jacobienne. Déterminant jacobien, exemple des coordonnées polaires.

• Il existe un seul vecteur, noté $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(a)$ qui vérifie $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df_a(h) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f_a, h \rangle$. Expression du gradient dans une BON de $\mathbb{R}^n$, cas de la base canonique. Expression du gradient « en polaires ». *Chain rule 1* s'écrit aussi $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$.

• Courbe implicite d'équation $f(x, y) = 0$, point régulier. Courbes à connaître : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ et $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$. On admet qu'au voisinage d'un point régulier, c'est le support d'un arc dont la dérivée ne s'annule pas. Le gradient est orthogonal à la tangente (définie comme la droite passant par $\gamma(t_0)$ dirigée par $\gamma'(t_0)$). Équation de la tangente dans un repère orthonormal. Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$ est orienté vers les valeurs croissantes de f .

• Surface implicite d'équation $f(x, y, z) = 0$, point régulier. Surfaces à connaître : $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $C : x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $PE : x^2 + y^2 = z$, $PH : x^2 - y^2 = z$, $H1 : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et $H2 : x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (savoir raisonner par sections planes pour retrouver la forme). Par définition, le plan tangent à $\mathcal{S} : f(x, y, z) = 0$ en un point régulier a est le plan affine passant par a dont $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$ est un vecteur normal. Équation du plan tangent en a dans un repère orthonormal.

• Dérivées partielles d'ordre supérieur, notations $\partial_{j,i}^2 f = \partial_j(\partial_i f)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ (dérivées partielles secondes toutes continues). Théorème de Schwarz (admis), matrice hessienne $H_f(a)$: elle est symétrique si f est de classe $\mathcal{C}^2$. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise), écriture avec la hessienne.

• Exemples d'équations aux dérivées partielles ; quelques résolutions à l'aide d'un changement de variable donné. Savoir résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$ à l'aide de $(X = x, Y = y - x)$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$.

• Extrémums globaux, globaux stricts, locaux, locaux stricts. Condition nécessaire du 1^{er} ordre : $\overrightarrow{\nabla} f(a) = \vec{0}$. Notion de point critique, de point col (ou selle) : exemple de $(x, y) \mapsto xy$ en $(0, 0)$. La CN1 exige de se placer sur un **ouvert** : savoir exhiber expliquer pourquoi.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 4 : 1, 2, 3, 4, 5, 6 (exemple du cours), 8, 9, 12, 14, 16. Les exercices 10 et 15 seront corrigés lundi.