



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

## 1 Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$

- Fonctions partielles en un point d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Limite/continuité en un point d'une telle fonction. Si  $f$  est continue en  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_{k,a}$  est continue en  $a_k$ , mais la réciproque est fautive. Dérivées partielles, classe  $\mathcal{C}^1$  définie par la continuité des dérivées partielles.

- Théorème de l'approximation affine (démonstration quand  $n = 2$ ). Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $f$  est continue. Différentielle de  $f$  au point  $a$ , notation  $df_a$  ou  $df(a)$ . Il n'existe qu'une seule forme linéaire  $L$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $f(a+h) - f(a) = L(h) + o(\|h\|)$ . Exemples de base : fonction constante, restriction d'une forme linéaire, et cas  $n = 1$  : relation  $f'(a) = df_a(1)$ . Propriétés calculatoires :  $d$  est linéaire,  $d(fg)_a$  et  $d\left(\frac{f}{g}\right)_a$  si  $g(a) \neq 0$ .

- Formes différentielle de degré 1 sur un ouvert  $U$  : leur ensemble est noté  $\Omega^1(U)$ . Forme différentielle (totale) exacte. Si  $\omega \in \Omega^1(U)$ , il existe des fonctions  $P_1, \dots, P_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\omega_a(h) = P_1(a)h_1 + \dots + P_n(a)h_n$ , écriture symbolique  $\omega = P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n$ .

- Dérivée d'une composée :  $\frac{d}{dt}f(\gamma(t))$  (*chain rule 1*), dérivées partielles de  $f * (u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  (*chain rule 2*). Savoir expliquer l'écriture  $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$ .

- Il existe un seul vecteur, noté  $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$  ou  $\overrightarrow{\nabla} f(a)$  qui vérifie  $\forall h \in \mathbb{R}^n, df_a(h) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f_a, h \rangle$ . Expression du gradient dans une BON de  $\mathbb{R}^n$ , cas de la base canonique. Expression du gradient « en polaires ». *Chain rule 1* s'écrit aussi  $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle$  ou encore  $df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ .

- Circulation d'un champ de gradients, cas d'un circuit fermé. Notion de champ de vecteurs à circulation conservative. Réciproque locale (admise), cas d'un ouvert « en un seul morceau ». Intégration d'une 1-forme différentielle le long d'un arc, lien avec les circulations. La 1-forme d'angle  $\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$  n'est pas exacte.

- Courbe implicite d'équation  $f(x, y) = 0$ , point régulier. Courbes à connaître :  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$  et  $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$ . On admet qu'au voisinage d'un point régulier, c'est le support d'un arc dont la dérivée ne s'annule pas. Le gradient est orthogonal à la tangente (définie comme la droite passant par  $\gamma(t_0)$  dirigée par  $\gamma'(t_0)$ ). Équation de la tangente dans un repère orthonormal. Le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$  est orienté vers les valeurs croissantes de  $f$ , sa norme est d'autant plus grande que  $f$  varie rapidement : Lecture graphique sur les lignes de niveau. Connaître les étymologies grecques d'*isotherme*, *isobare*, *isobathe*, *isochore*.

- Surface implicite d'équation  $f(x, y, z) = 0$ , point régulier. Surfaces à connaître :  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $C : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ,  $PE : x^2 + y^2 = z$ ,  $PH : x^2 - y^2 = z$ ,  $H1 : x^2 + y^2 - z^2 = 1$  et  $H2 : x^2 + y^2 - z^2 = -1$  (savoir raisonner par sections planes pour retrouver la forme). Par définition, le plan tangent à  $\mathcal{S} : f(x, y, z) = 0$  en un point régulier  $a$  est le plan affine passant par  $a$  dont  $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$  est un vecteur normal. Équation du plan tangent en  $a$  dans un repère orthonormal.

- Dérivées partielles d'ordre supérieur, notations  $\partial_{j,i}^2 f = \partial_j(\partial_i f)$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ , fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  (dérivées partielles secondes toutes continues). Théorème de Schwarz (admis), matrice hessienne  $H_f(a)$  : elle est symétrique si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise).

- Extrémums, globaux, locaux, stricts. Condition nécessaire du 1<sup>er</sup> ordre. Point critique, point col (ou selle). Utilisation de Taylor-Young à l'ordre 2 pour déterminer la nature d'un point critique.

## 2 Suppléments pour la Physique

- Opérateurs divergence, rotationnel et laplacien. Relations  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{F})) = 0$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \overrightarrow{0}$ . Déterminant jacobien des changements polaires, cylindriques et sphériques.

- Intégrales multiples, théorème de Fubini, théorème de changement de variables.

## 3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 4 1, 2, 4, 5, 6, 8 (sans la question 3), 9, 10, 11, 14, 15, 17, 22, 23, 24, 27