Année 2024/25

Khôlle n° 7
semaine du 18 novembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$

• Fonctions partielles en un point d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Limite/continuité en un point d'une telle fonction. Si f est continue en $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_{k,a}$ est continue en a_k, mais la réciproque est fausse. Dérivées partielles, classe $\mathscr{C}^1$ définie par la continuité des dérivées partielles.

• Théorème de l'approximation affine (démonstration quand $n = 2$). Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est continue. Différentielle de f au point a, notation $\mathrm{d}f_a$ ou $\mathrm{d}f(a)$. Il n'existe qu'une seule forme linéaire L sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f(a+h) - f(a) = \mathrm{L}(h) + o(\|h\|)$. Exemples de base : fonction constante, restriction d'une forme linéaire, et cas $n = 1$: relation $f'(a) = \mathrm{d}f_a(1)$. Propriétés calculatoires : d est linéaire, $\mathrm{d}(fg)_a$ et $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)_a$ si $g(a) \neq 0$.

• Dérivée d'une composée : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ (*chain rule* 1), dérivées partielles de $f^*(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ (*chain rule* 2). Savoir expliquer l'écriture symbolique $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$. Écriture matricielle par la jacobienne.

• Il existe un seul vecteur, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_a$ ou $\vec{\nabla} f(a)$ qui vérifie $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f_a(h) = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_a, h\rangle$. <u>Expression du gradient dans une BON de $\mathbb{R}^n$, cas de la base canonique</u>. <u>Expression du gradient « en polaires »</u>. *Chain rule* 1 s'écrit aussi $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{\gamma(t)}, \gamma'(t)\rangle$ ou encore $\mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$.

• <u>Circulation d'un champ de gradients</u>, cas d'un circuit fermé. Notion de champ de vecteurs à circulation conservative. Réciproque locale (admise), cas d'un ouvert « en un seul morceau ».

• Courbe implicite d'équation $f(x, y) = 0$, point régulier. Courbes à connaître : $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 1$ et $\mathscr{H} : x^2 - y^2 = 1$. On admet qu'au voisinage d'un point régulier, c'est le support d'un arc dont la dérivée ne s'annule pas. <u>Le gradient est orthogonal à la tangente</u> (définie comme la droite passant par $\gamma(t_0)$ dirigée par $\gamma'(t_0)$). <u>Équation de la tangente dans un repère orthonormal</u>. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_a$ est orienté vers les valeurs croissantes de f, sa norme est d'autant plus grande que f varie rapidement : lecture graphique sur les lignes de niveau.

• Surface implicite d'équation $f(x, y, z) = 0$, point régulier. Surfaces à connaître : S : $x^2+y^2+z^2 = 1$, C : $x^2+y^2-z^2 = 0$, PE : $x^2+y^2 = z$, PH : $x^2-y^2 = z$, H1 : $x^2+y^2-z^2 = 1$ et H2 : $x^2+y^2-z^2 = -1$ (savoir raisonner par sections planes pour retrouver la forme). Par définition, le plan tangent à $\mathscr{S} : f(x, y, z) = 0$ en un point régulier a est le plan affine passant par a dont $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_a$ est un vecteur normal. Équation du plan tangent en a dans un repère orthonormal.

• Dérivées partielles d'ordre supérieur, notations $\partial^2_{j,i} f = \partial_j(\partial_i f)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ (dérivées partielles secondes toutes continues). Théorème de Schwarz (admis), matrice hessienne $\mathrm{H}_f(a)$: elle est symétrique si f est de classe $\mathscr{C}^2$. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise), écriture avec la hessienne.

• Exemples d'équations aux dérivées partielles à résoudre par changement de variable.

• Extrémums : global, local, strict. <u>Conditions nécessaires du premier ordre</u>. Notion de point critique, de point col (ou selle). Exemple si le domaine D n'est pas un ouvert (étude sur le bord ∂D).

2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 4}}$: 1, 4, 5, 6, 7 8, 9, 10, 12, 15, 17.