



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Séries numériques (exercices seulement)

2 Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$

• Fonctions partielles en un point d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Limite/continuité en un point d'une telle fonction. Si f est continue en $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_{k,a}$ est continue en a_k , mais la réciproque est fausse. Dérivées partielles, classe $\mathcal{C}^1$ définie par la continuité des dérivées partielles.

• Théorème de l'approximation affine (démonstration quand $n = 2$). Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est continue. Notion de fonction différentiable en un point. Différentielle de f au point a , notation df_a ou $df(a)$. Il n'existe qu'une seule forme linéaire L sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f(a+h) - f(a) = L(h) + o(\|h\|)$. Exemples de base : fonction constante, restriction d'une forme linéaire, et cas $n = 1$. Propriétés calculatoires : d est linéaire, $d(fg)_a$ et $d\left(\frac{f}{g}\right)_a$ si $g(a) \neq 0$.

• Notions de forme différentielle de degré 1, écriture $P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n$, formes (totales) exactes. Notation « δ » pour les 1-formes non exactes.

• Dérivée d'une composée : $\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ (*chain rule 1*), dérivées partielles de $f^* : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ (*chain rule 2*). Savoir expliquer l'écriture symbolique $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$. Écriture matricielle avec la jacobienne. Déterminant jacobien, exemple des coordonnées polaires.

• Il existe un seul vecteur, noté $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(a)$ qui vérifie $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df_a(h) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f_a, h \rangle$. Expression du gradient dans une BON de $\mathbb{R}^n$, cas de la base canonique. Expression du gradient « en polaires ». *Chain rule 1* s'écrit aussi $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle$ ou encore $df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$.

• Courbe implicite d'équation $f(x, y) = 0$, point régulier. Courbes à connaître : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ et $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$. On admet qu'au voisinage d'un point régulier, c'est le support d'un arc dont la dérivée ne s'annule pas. Le gradient est orthogonal à la tangente (définie comme la droite passant par $\gamma(t_0)$ dirigée par $\gamma'(t_0)$). Équation de la tangente dans un repère orthonormal. Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$ est orienté vers les valeurs croissantes de f .

• Surface implicite d'équation $f(x, y, z) = 0$, point régulier. Surfaces à connaître : $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $C : x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $PE : x^2 + y^2 = z$, $PH : x^2 - y^2 = z$, $H1 : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et $H2 : x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (savoir raisonner par sections planes pour retrouver la forme). Par définition, le plan tangent à $\mathcal{S} : f(x, y, z) = 0$ en un point régulier a est le plan affine passant par a dont $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$ est un vecteur normal. Équation du plan tangent en a dans un repère orthonormal.

• Dérivées partielles d'ordre supérieur, notations $\partial_{j,i}^2 f = \partial_j(\partial_i f)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ (dérivées partielles secondes toutes continues). Théorème de Schwarz (admis), matrice hessienne $H_f(a)$: elle est symétrique si f est de classe $\mathcal{C}^2$. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise), écriture avec la hessienne.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 3 : 4 (sauf la dernière série), 5, 6, 7, 13, 14, 15 (Q1 admise), 17.

TD 4 : 1, 5, 8, 9. Les exercices 2 et 3 seront corrigés lundi.

Temporary page!

L^AT_EX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L^AT_EX now knows how many pages to expect for this document.