Année 2023/24

Khôlle n°6
semaine du 6 novembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Séries numériques

• Sommes partielles, somme et reste d'une série convergente. Condition nécessaire de convergence, divergence grossière. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Linéarité de la somme. Lien suite-série (télescopage). Séries géométriques : expression des sommes partielles et convergence.

• Séries à termes positifs (STP), propriété fondamentale des STP, règles de comparaison (avec $\leqslant$, o, O, $\sim$). Pour $\sim$, on exige la constance du signe du terme général de l'une des deux séries. Comparaison série-intégrale (méthode des rectangles). Convergence des séries de Riemann, fonction ζ d'Euler-Riemann (sur $]1,+\infty[$). Savoir établir que $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \sim \ln(\mathrm{N})$ et $\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{\mathrm{N}}$.

• Règle de D'Alembert pour les STP. Cas douteux : savoir donner des exemples.

• 12 équivalences usuelles, dont 10 sont obtenues grâce à $f(x)-f(0) \underset{x\to 0}{\sim} f'(0)x$ si f est dérivable en 0 et $f'(0) \neq 0$. On ajoute celles donnant $\cos(x)-1$ et $\mathrm{ch}(x)-1$.

• Séries absolument convergentes, ACV $\Longrightarrow$ CV. L'ensemble, noté $\ell^1(\mathbb{N})$, des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n$ est ACV est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Inégalité triangulaire. Convergence commutative des séries ACV (admis), notation $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ réservée aux séries ACV. Séries semi-convergentes, exemple de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (nature et somme) : on a expliqué en cours comment permuter les termes pour obtenir une autre somme. Règles de comparaison pour les séries ACV, comparaison à une série de Riemann (règle du « $\times n^{\alpha}$ ») ou une série géométrique (règle du « $\times q^n$ »).

• Produit de Cauchy de deux séries numériques. Théorème des produits de Cauchy (cas où les deux séries sont ACV) : démonstration seulement pour les plus à l'aise. Application à $\sum \frac{n+1}{2^n}$.

• Nouvelles croissances comparées : $a^n = o(n!)$ quel que soit $a \in \mathbb{C}$, et $n! = o(n^n)$. Les croissances comparées vues en Sup sont à connaître (sans démonstration).

• Formule de Stirling : savoir montrer que $\left(\frac{(n/\mathrm{e})^n\sqrt{n}}{n!}\right)$ converge par le lien suite-série. La valeur de la limite s'obtient par les intégrales de Wallis (non exigible).

• Critère spécial des séries alternées, nature puis encadrement et signe de la somme et des restes. Application : trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$ mais telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient de natures différentes.

2 Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$ (cours seulement)

• Fonctions partielles en un point d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Limite/continuité en un point d'une telle fonction. Si f est continue en $a=(a_1,\ldots,a_n)$, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f_{k,a}$ est continue en $_k$, mais la réciproque est fausse. Dérivées partielles, classe $\mathscr{C}^1$.

• Théorème de l'approximation affine (démonstration quand $n=2$). Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est continue. Différentielle de f au point a, notation $\mathrm{d}f_a$ ou $\mathrm{d}f(a)$. Il n'existe qu'une seule forme linéaire L sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f(a+h)-f(a) = \mathrm{L}(h) + o(\|h\|)$. Exemples de base : fonction constante, restriction d'une forme linéaire, et cas $n=1$: relation $f'(a) = \mathrm{d}f_a(1)$. Propriétés calculatoires : d est linéaire, $\mathrm{d}(fg)_a$ et $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)_a$ si $g(a) \neq 0$.

• Formes différentielle de degré 1 sur un ouvert U : leur ensemble est noté $\Omega^1(\mathrm{U})$. Forme différentielle (totale) exacte. Les physiciens signalent par le symbole δ les formes non exactes (δW, δQ, etc.). Si $\omega \in \Omega^1(\mathrm{U})$, il existe des fonctions $\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ telles que $\omega_a(h) = \mathrm{P}_1(a)h_1 + \ldots + \mathrm{P}_n(a)h_n$, écriture symbolique $\omega = \mathrm{P}_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + \mathrm{P}_n\mathrm{d}x_n$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 3}}$ 1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 17, 19