Année 2025/26

Khôlle n° 6
semaine du 10 novembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Séries numériques

• Règle de D'Alembert pour les STP. Conséquence (nouvelles croissances comparées usuelles) : pour tout complexe a, $a^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$.

• Produit de Cauchy, théorème admis. Savoir calculer le produit de Cauchy d'une série géométrique par elle-même pour en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$.

• Espace ℓ^1 des suites dont la série associée est ACV : c'est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, inégalité $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Notation $\|u\|_1$. Propriétés de $\|\cdot\|_1$: savoir démontrer $\|u\|_1 = 0 \Longrightarrow u = 0$.

• Critère spécial des séries alternées : encadrement de la somme par les sommes partielles et informations sur les restes.

2 Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$ (cours seulement)

• Fonctions partielles en un point d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Limite/continuité en un point d'une telle fonction. Si f est continue en $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_{k,a}$ est continue en a_k, mais la réciproque est fausse. Dérivées partielles, classe $\mathscr{C}^1$ définie par la continuité des dérivées partielles.

• Théorème de l'approximation affine (démonstration quand $n = 2$). Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est continue. Notion de fonction différentiable en un point. Différentielle de f au point a, notation $\mathrm{d}f_a$ ou $\mathrm{d}f(a)$. Il n'existe qu'une seule forme linéaire L sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f(a+h) - f(a) = \mathrm{L}(h) + o(\|h\|)$. Exemples de base : fonction constante, restriction d'une forme linéaire, et cas $n = 1$. Propriétés calculatoires : d est linéaire, $\mathrm{d}(fg)_a$ et $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)_a$ si $g(a) \neq 0$.

• Notions de forme différentielle de degré 1, écriture $\mathrm{P}_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + \mathrm{P}_n\mathrm{d}x_n$, formes (totales) exactes. Notation « δ » pour les 1-formes non exactes.

• Dérivée d'une composée : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ (*chain rule* 1), dérivées partielles de $f^* : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ (*chain rule* 2). Savoir expliquer l'écriture symbolique $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$. Écriture matricielle avec la jacobienne. Déterminant jacobien, exemple des coordonnées polaires.

• Il existe un seul vecteur, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_a$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(a)$ qui vérifie $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f_a(h) = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_a, h\rangle$. Expression du gradient dans une BON de $\mathbb{R}^n$, cas de la base canonique. Expression du gradient « en polaires ». *Chain rule* 1 s'écrit aussi $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{\gamma(t)}, \gamma'(t)\rangle$ ou encore $\mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 3}}$: 4 (sauf la dernière série), 5, 6, 7, 13. Les exercices 14 et 17 seront corrigés lundi.