Année 2023/24

Khôlle n°5
semaine du 16 octobre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire

Surtout les exercices, mais le cours doit être parfaitement su (cf. programme de khôlle n°4).

2 Séries numériques

• Sommes partielles, somme et reste d'une série convergente. Condition nécessaire de convergence, divergence grossière. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Linéarité de la somme. Lien suite-série (télescopage). Séries géométriques : expression des sommes partielles et convergence.

• Séries à termes positifs (STP), propriété fondamentale des STP, règles de comparaison (avec $\leqslant$, o, O, $\sim$). Pour $\sim$, on exige la constance du signe du terme général de l'une des deux séries. Comparaison série-intégrale (méthode des rectangles). Convergence des séries de Riemann, fonction ζ d'Euler-Riemann (sur $]1, +\infty[$). Utilisation de la méthode des rectangles pour établir que $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \sim \ln(\mathrm{N})$ ou pour montrer que $\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{\mathrm{N}}$.

• Règle de D'Alembert pour les STP. Cas douteux : savoir donner des exemples.

• 12 équivalences usuelles, dont 10 sont obtenues grâce à $f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} f'(0)x$ si f est dérivable en 0 et $f'(0) \neq 0$. On ajoute celles donnant $\cos(x) - 1$ et $\mathrm{ch}(x) - 1$.

• Séries absolument convergentes, ACV $\Longrightarrow$ CV. L'ensemble, noté $\ell^1(\mathbb{N})$, des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n$ est ACV est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Inégalité triangulaire. Convergence commutative des séries ACV (admis), notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ réservée aux séries ACV. Séries semi-convergentes, exemple de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (nature et somme) : on a expliqué en cours comment permuter les termes pour obtenir une autre somme. Règles de comparaison asymptotiques adaptées aux séries absolument convergentes, comparaison à une série de Riemann (règle du « $\times n^{\alpha}$ ») ou une série géométrique (règle du « $\times q^n$ »).

• Produit de Cauchy de deux séries numériques. Théorème des produits de Cauchy (cas où les deux séries sont ACV). Application à $\sum \frac{n+1}{2^n}$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 2}}$: 1, 2, 3, 8, 16, 19, 21, 25, 29, 33, 36. $\boxed{\text{TD 3}}$ 1, 4 (séries n° 1, 2, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13), 6, 7.