Année 2023/24

Khôlle n°4

semaine du 9 octobre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire (partie 1)

• Structure d'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (qui sera $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, éventuellement $\mathbb{Q}$), espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$ $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ (aussi noté $\mathbb{K}^X$), $\mathscr{F}(X,E)$ (si E est un $\mathbb{K}$-ev). Produit fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Structure de $\mathbb{K}$-algèbre : exemples de $\mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (savoir définir la multiplication dans ces deux algèbres).

• Familles de vecteurs, notion de combinaison linéaire. Familles libres, liées, génératrices, propriétés. Espaces vectoriels de dimension finie. Bases, théorèmes de la base extraite, de la base incomplète, de la dimension. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ en exhibant leurs bases canoniques. <u>Savoir expliquer pourquoi $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$</u>.

• Sous-espaces vectoriels, <u>intersection de sous-espaces vectoriels</u>, sous-espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$ engendré par une partie A, description de ses éléments. Dimension d'un sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, base adaptée à un tel sous-espace. Dimension d'un produit de p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie (<u>démonstration pour $p = 2$</u>). Somme de p sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Somme directe : <u>caractérisation par l'unicité de la décomposition de 0_E</u>, <u>caractérisation quand $p = 2$</u>. Supplémentaires, exemples de référence : $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$. Existence d'au moins un supplémentaire en dimension finie, si F n'est pas $\{0_E\}$ ou E, et si $\mathbb{K}$ est infini, F admet une infinité de supplémentaires. Formule de Grassmann et généralisation : sous-additivité de la dimension et cas d'égalité (<u>démonstration en utilisant le théorème du rang</u>). Base adaptée à des supplémentaires.

• Applications linéaires (morphismes endo-, iso, auto-, mono-, épi-). Propriétés de base. Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$, groupe général linéaire $GL(E)$, $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot)$. Notion de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes. Noyau, image, caractérisation de l'injectivité. <u>Image d'une famille libre par une application linéaire injective</u>, énoncé dual avec les familles génératrices. <u>Fixation d'une application linéaire par une base au départ</u>, <u>ou par des supplémentaires au départ</u>. <u>Traduction en termes d'isomorphisme</u>.

• Applications linéaires en dimension finie. Comparaison des dimensions en cas d'injectivité/surjectivité, équivalence entre « être isomorphes » et « avoir même dimension ». <u>Lemme des supplémentaires du noyau</u>, <u>théorème du rang</u>. En dimension finie, un endomorphisme est injectif ssi il est surjectif. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ en exhibant une base, cas de $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, notion de base duale.

• Matrices d'une application linéaire dans un couple de bases. <u>Traduction matricielle de $y = u(x)$</u>, matrice de $v \circ u$, matrice de u^{-1}. Matrice de passage entre deux bases. Changement de base pour les vecteurs, pour les applications linéaires. Matrices carrées semblables.Trace d'une matrice carrée, <u>propriété $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$</u>. <u>Deux matrices semblables ont même trace</u>. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

La notion d'application linéaire canoniquement associée à une matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a été rappelée en T.D., ainsi que celles de noyau et d'image de M.

2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 2}}$: 1, 2, 3, 8, 13, 16, 18, 21, 24, 25, 29