Année 2024/25

Khôlle n° 4
semaine du 14 octobre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire

Surtout les exercices, mais le cours doit être parfaitement su (cf. programme de khôlle n° 3).

2 Séries numériques

• Sommes partielles, somme et reste d'une série convergente. Condition nécessaire de convergence, divergence grossière. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Linéarité de la somme. Lien suite-série (télescopage). Séries géométriques : expression des sommes partielles et convergence.

• Séries à termes positifs (STP), propriété fondamentale des STP, règles de comparaison (avec $\leqslant$, o, O, $\sim$). Pour $\sim$, on exige la constance du signe du terme général de l'une des deux séries. Comparaison série-intégrale (méthode des rectangles). Convergence des séries de Riemann, fonction ζ d'Euler-Riemann (sur $]1,+\infty[$). La valeur de $\zeta(2)$ est à connaître. Utilisation de la méthode des rectangles pour établir que $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \sim \ln(\mathrm{N})$ ou pour montrer que $\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{\mathrm{N}}$.

• Règle de D'Alembert pour les STP. Cas douteux : savoir donner des exemples. Application de la règle de D'Alembert : croissances comparées usuelles $n! = o(n^n)$.

• 12 équivalences usuelles, dont 10 sont obtenues grâce à $f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} f'(0)x$ si f est dérivable en 0 et $f'(0) \neq 0$. On ajoute celles donnant $\cos(x) - 1$ et $\operatorname{ch}(x) - 1$.

• Séries absolument convergentes, ACV $\Longrightarrow$ CV. Ensemble $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n$ est ACV. Inégalité triangulaire. Convergence commutative des séries ACV (admis), notation $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ réservée aux séries ACV. Séries semi-convergentes, exemple de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (nature et somme) : on a expliqué en cours comment permuter les termes pour obtenir une autre somme. Règles de comparaison asymptotiques adaptées aux séries absolument convergentes.

• Produit de Cauchy de deux séries numériques. Théorème des produits de Cauchy (cas où les deux séries sont ACV). Application : calcul de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 2}}$: 1, 2, 3, 8, 9, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 25, 26, 29, 35.