



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Séries numériques

- Série associée à une suite numériques u . Condition nécessaire de convergence, divergence grossière. Divergence de la série harmonique. Linéarité de la somme. Lien suite-série (télescopage).
- Suites géométriques (rappels). Séries géométriques : expression des sommes partielles et convergence.
- Séries à termes positifs (STP), propriété fondamentale des STP, comparaison des STP avec $\leq$. Comparaison série-intégrale (méthode des rectangles). Convergence des séries de Riemann, fonction ζ d'Euler-Riemann (sur $]1, +\infty[$). La valeur de $\zeta(2)$ est à connaître. Utilisation de la méthode des rectangles pour établir que
 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ ou pour montrer que $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{p}$.
- Règles de comparaison avec o , O , $\sim$ (savoir définir ces notions). Pour $\sim$, on exige la constance du signe du terme général de l'une des deux séries. Douze équivalences usuelles avec allure des courbes.
- Règle de D'Alembert pour les STP : savoir démontrer le cas $\ell < 1$. Conséquence (nouvelles croissances comparées usuelles) : pour tout complexe a , $a^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$.
- Produit de Cauchy, théorème admis.
- Séries ACV : elles convergent (cas réel, puis cas complexe). Espace ℓ^1 des suites dont la série associée est ACV : c'est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, inégalité $\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Notation $\|u\|_1$. Propriétés de $\|\cdot\|_1$: savoir démontrer $\|u\|_1 = 0 \implies u = 0$.
- Adaptation des relations de comparaison $\leq$, O , o , $\sim$ aux séries ACV.
- Formule de Stirling. Seulement pour les plus à l'aise : savoir montrer qu'il existe $\ell > 0$ tel que $\frac{n!}{\sqrt{n(\frac{n}{e})^n}} \rightarrow \ell$.
- Critère spécial des séries alternées : convergence de $\sum (-1)^n a_n$ si (a_n) décroît et tend vers 0, encadrement de la somme par les sommes partielles S_{2n} et S_{2p+1} et informations sur les restes.

2 Exercices de TD à savoir refaire

TD 3 : 4 (séries vues en TD uniquement), 6, 7.