Année 2024/25

Khôlle n° 3
semaine du 7 octobre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire (partie 1)

• Structure d'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (qui sera $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, éventuellement $\mathbb{Q}$), espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$ $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ (aussi noté $\mathbb{K}^X$), $\mathscr{F}(X, E)$ (si E est un $\mathbb{K}$-ev). Produit fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Structure de $\mathbb{K}$-algèbre : exemples de $\mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (savoir définir la multiplication dans ces deux algèbres).

• Familles de vecteurs, notion de combinaison linéaire. Familles libres, liées, génératrices, propriétés. Espaces vectoriels de dimension finie. Bases, théorèmes de la base extraite, de la base incomplète, de la dimension. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ en exhibant leur base canonique. Savoir expliquer pourquoi $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 = 3$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6$.

• Sous-espaces vectoriels, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$ engendré par une partie A, description de ses éléments. Dimension d'un sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Dimension d'un produit de p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie (démonstration pour $p = 2$). Somme de p sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Somme directe : caractérisation par l'unicité de la décomposition de 0_E, caractérisation quand $p = 2$. Supplémentaires, exemples de référence : $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$. Existence d'au moins un supplémentaire en dimension finie, si F n'est pas $\{0_E\}$ ou E, et si $\mathbb{K}$ est infini, F admet une infinité de supplémentaires. Formule de Grassmann et généralisation : sous-additivité de la dimension et cas d'égalité (démonstration en utilisant le théorème du rang).

• Applications linéaires (morphismes endo-, iso, auto-, mono-, épi-). Propriétés de base. Espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$, groupe général linéaire $GL(E)$, $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$. Notion de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes. Noyau, image, caractérisation de l'injectivité. Image d'une famille libre par une application linéaire injective, énoncé dual avec les familles génératrices. Si f envoie une base sur une base, c'est un isomorphisme. Fixation d'une application linéaire par une base au départ, ou par des supplémentaires au départ. Traduction en termes d'isomorphisme.

• Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective, alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$, énoncé dual pour les applications surjectives, E et F sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension. Tout supplémentaire d'un noyau est isomorphe à l'image, théorème du rang. Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$. Espace dual E^*, base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ associée à une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

• Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Traduction matricielle de $y = u(x)$. Matrice d'une composée. Matrice de passage entre deux bases, propriétés. Changement de coordonnées des vecteurs : $X = PX'$, des matrices : $M = QM'P^{-1}$. Cas des endomorphismes : $M = PM'P^{-1}$. Notion de matrices semblables.

• Trace d'une matrice carrée, propriété fondamentale de la trace : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Savoir expliquer pourquoi ce fait permet de définir la trace d'un endomorphisme en dimension finie.

2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 2}}$: exercices 1, 2, 3, 9, 13, 15, 16, 19, 21, 25, 26, 33 (fait en cours).