



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire (révisions de Sup)

- Applications linéaires (endo-, iso-, auto-). Propriétés de base. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$, groupe général linéaire $GL(E)$, $\mathbb{K}$ -algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$. Notion de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels isomorphes. Noyau, image, caractérisation de l'injectivité. Image d'une famille libre par une application linéaire injective, énoncé dual avec les familles génératrices. Si f envoie une base sur une base, c'est un isomorphisme. Fixation d'une application linéaire par une base au départ, ou par des supplémentaires au départ. Traduction en termes d'isomorphisme.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$, énoncé dual pour les applications surjectives, E et F sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension. Tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image, théorème du rang. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Espace dual E^* , base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ associée à une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Traduction matricielle de $y = u(x)$. Matrice d'une composée, matrice de u^{-1} . Matrice de passage entre deux bases, propriétés. Changement de coordonnées des vecteurs : $X = PX'$, des matrices : $M = QM'P^{-1}$. Cas des endomorphismes : $M = PM'P^{-1}$. Notion de matrices semblables.

- Trace d'une matrice carrée, propriété fondamentale de la trace : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Savoir expliquer pourquoi ce fait permet de définir la trace d'un endomorphisme en dimension finie.

2 Séries numériques

- Série associée à une suite numériques u . Condition nécessaire de convergence, divergence grossière. Divergence de la série harmonique. Linéarité de la somme. Lien suite-série (télescopage).

- Suites géométriques (rappels). Séries géométriques : expression des sommes partielles et convergence.

- Séries à termes positifs (STP), propriété fondamentale des STP, comparaison des STP avec $\leq$. Comparaison série-intégrale (méthode des rectangles). Convergence des séries de Riemann, fonction ζ d'Euler-Riemann (sur $]1, +\infty[$). La valeur de $\zeta(2)$ est à connaître. Utilisation de la méthode des rectangles pour établir que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n) \text{ ou pour montrer que } \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{p}.$$

- Règles de comparaison avec o , O , $\sim$ (savoir définir ces notions). Pour $\sim$, on exige la constance du signe du terme général de l'une des deux séries. Douze équivalences usuelles avec allure des courbes.

- Règle de D'Alembert pour les STP.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 2 : 1, 2, 3, 7, 8, 10.