Année 2023/24

Khôlle n°3
semaine du 2 octobre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Équations différentielles linéaires scalaires

- Résolution de $y' = ay$ avec $a : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continue. Résolution de $y' = ay + b$ avec $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues, variation de la constante.

- Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$ si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Résolution dans $\mathbb{R}$ si a, b, c sont réels et si $b^2 - 4ac < 0$. Forme $\mathrm{A}\cos(\omega t - \varphi)$. Résolution de $ay'' + by' + cy = m(t)$ si m est continue, variation de la constante.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL d'ordre $k \geqslant 1$ quelconques, notion de condition de Cauchy. Isomorphisme de Wroński associé à un réel t_0 : $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(k-1)}(t_0))$ et dimension de l'espace S_0 des solutions de l'homogène associée.

2 Algèbre linéaire (partie 1)

- Structure d'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (qui sera $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, éventuellement $\mathbb{Q}$), espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{K}(\mathrm{X})$ $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$ (aussi noté $\mathbb{K}^{\mathrm{X}}$), $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$ (si E est un $\mathbb{K}$-ev). Produit fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Structure de $\mathbb{K}$-algèbre : exemples de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (savoir définir la multiplication dans ces deux algèbres).

- Familles de vecteurs, notion de combinaison linéaire. Familles libres, liées, génératrices, propriétés. Espaces vectoriels de dimension finie. Bases, théorèmes de la base extraite, de la base incomplète, de la dimension. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ en exhibant leur base canonique. Savoir expliquer pourquoi $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

- Sous-espaces vectoriels, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathrm{A})$ engendré par une partie A, description de ses éléments. Dimension d'un sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, base adaptée à un tel sous-espace. Dimension d'un produit de p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie (démonstration pour $p = 2$). Somme de p sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Somme directe : caractérisation par l'unicité de la décomposition de 0_{E}, caractérisation quand $p = 2$. Supplémentaires, exemples de référence : $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$. Existence d'au moins un supplémentaire en dimension finie, si F n'est pas $\{0_{\mathrm{E}}\}$ ou E, et si $\mathbb{K}$ est infini, F admet une infinité de supplémentaires. Formule de Grassmann et généralisation : sous-additivité de la dimension et cas d'égalité (démonstration en utilisant le théorème du rang). Base adaptée à des supplémentaires.

- Applications linéaires (morphismes endo-, iso, auto-, mono-, épi-). Propriétés de base. Espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, groupe général linéaire $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$, $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{L}(\mathrm{E}), +, \circ, \cdot)$. Notion de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes. Noyau, image, caractérisation de l'injectivité. Image d'une famille libre par une application linéaire injective, énoncé dual avec les familles génératrices.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 1}}$: 8, 9, 12, 13, 14, 1 5, 16 $\boxed{\text{TD 2}}$: 1, 2, 3, 8, 13, 16