



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire (révisions de Sup)

- Structure d'espace vectoriel sur un corps K (qui sera $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, éventuellement $\mathbb{Q}$), espaces de référence : K^n , $K[X]$, $K(X)$, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, $\mathcal{F}(X, K)$ (aussi noté K^X), $\mathcal{F}(X, E)$ (si E est un K -ev). Produit fini de K -espaces vectoriels. Structure de K -algèbre : exemples de $K[X]$ et $\mathcal{M}_n(K)$ (savoir définir la multiplication dans ces deux algèbres).

- Familles de vecteurs, notion de combinaison linéaire. Ensemble $K^{(I)}$ des familles de scalaires presque nulles. Familles libres, liées, génératrices, propriétés. Espaces vectoriels de dimension finie. Bases, théorèmes de la base extraite, de la base incomplète, de la dimension. Dimensions de K^n , $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, $K_n[X]$ en exhibant leur base canonique. Dimension de $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$. Savoir expliquer pourquoi $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

- Sous-espaces vectoriels, intersection de sous-espaces vectoriels, conséquence : étant donné une partie A , il existe un plus petit sev contenant A , notation $\text{Vect}_K(A)$ et description de ses éléments. Dimension d'un sev d'un K -ev de dimension finie. Dimension d'un produit de p K -espaces vectoriels de dimension finie : démo pour $p = 2$. Somme de p sous-espaces vectoriels d'un même K -espace vectoriel. Somme directe : caractérisation par l'unicité de la décomposition de 0_E , caractérisation quand $p = 2$. Supplémentaires, exemples de référence : $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S}_n(K) \oplus \mathcal{A}_n(K)$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{J}$. Existence d'au moins un supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann et généralisation : sous-additivité de la dimension et cas d'égalité (démonstration en utilisant le théorème du rang).

- Applications linéaires (endo-, iso-, auto-). Propriétés de base. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$, groupe général linéaire $GL(E)$, K -algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$. Notion de K -espaces vectoriels isomorphes. Noyau, image, caractérisation de l'injectivité. Image d'une famille libre par une application linéaire injective, énoncé dual avec les familles génératrices. Si f envoie une base sur une base, c'est un isomorphisme. Fixation d'une application linéaire par une base au départ, ou par des supplémentaires au départ. Traduction en termes d'isomorphisme.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$, énoncé dual pour les applications surjectives, E et F sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension. Tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image, théorème du rang. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Espace dual E^* , base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ associée à une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Traduction matricielle de $y = u(x)$. Matrice d'une composée, matrice de u^{-1} . Matrice de passage entre deux bases, propriétés. Changement de coordonnées des vecteurs : $X = PX'$, des matrices : $M = QM'P^{-1}$. Cas des endomorphismes : $M = PM'P^{-1}$. Notion de matrices semblables.

- Trace d'une matrice carrée, propriété fondamentale de la trace : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Savoir expliquer pourquoi ce fait permet de définir la trace d'un endomorphisme en dimension finie.

2 Exercices de TD à savoir refaire

TD 0 (document de travail de vacances) : tout. **Alphabet grec**, savoir énoncer des définitions, des théorèmes, syntaxe, grammaire et orthographe, locutions malvenues : « du coup », « en vrai », « pour moi », « au final », bon usage des quantificateurs, confusion entre f et $f(x)$, etc.

TD 1 : 1, 2, 8, 9, 12, 14, 15, 16.

TD 2 : 1, 2, 3.