Année 2023/24

Khôlle n°2
semaine du 25 septembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Arcs paramétrés (ou fonctions vectorielles)

• Arc paramétré dans $\mathbb{R}^n$, support d'un arc et exemples de référence vus en cours (cercle, segment, droite, hélice, graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Produit scalaire canonique et norme associée sur $\mathbb{R}^n$, inégalités de Cauchy-Schwarz (admise) et triangulaire. Limite d'un arc en un point adhérent à son domaine de définition (qui sera une réunion finie d'intervalles). Caractérisation des limites par les fonctions composantes. Arc continu sur son ensemble de définition, caractérisation de la continuité par les fonctions composantes. Sous-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$. Cas des arcs à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: on identifie une matrice de taille (n, p) avec un np-uplet de réels.

• Arc paramétré dérivable. Approximation affine. Caractérisation de la dérivabilité par les fonctions composantes. Linéarité de la dérivation. Classe $\mathscr{C}^k$, $\mathscr{C}^\infty$. Dérivée de $\gamma \circ \alpha$ avec $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dérivée de $t \mapsto \lambda(t) \cdot x$ avec $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ fixé. Dérivée de $t \mapsto \mathrm{L}(\gamma(t))$ et <u>de $t \mapsto \mathrm{B}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$</u> avec L linéaire et B bilinéaire. Applications : dérivée d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel. <u>À savoir refaire</u> : si $\mathrm{M}(t)$ est un point mobile parcourant un cercle de centre O, alors $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Dérivée k-ième de $\mathrm{B}(\gamma_1, \gamma_2)$ (Leibniz).

• Notion de champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, continuité. Circulation d'un champ de vecteurs continu $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ le long d'un arc γ de classe $\mathscr{C}^1$. Notations $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$, $\displaystyle\oint_\gamma \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$. Notion d'arcs $\mathscr{C}^1$-positivement équivalents (notation $\gamma_1 \overset{+}{\sim} \gamma_2$) : c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des arcs $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ définis sur des segments. Si $\gamma_1 \overset{+}{\sim} \gamma_2$, alors les circulations de tout champ de vecteurs continu $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ le long de γ_1 et γ_2 sont égales, notations $\displaystyle\int_{\mathscr{C}+} \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ ou $\displaystyle\int_{\mathrm{M} \in \mathscr{C}+} \overrightarrow{\mathrm{F}}_\mathrm{M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dM}}$ (avec les versions $\oint$ correspondantes) où $\mathscr{C}$ est le support d'un arc γ de classe $\mathscr{C}^1$ (le cas continu et $\mathscr{C}^1$ par morceaux a été vu en TD).

2 Équations différentielles linéaires scalaires

• Rappels essentiels d'Analyse : théorème des accroissements finis (TAF) : il n'est pas valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, inégalité des accroissements finis (IAF) qui est valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, <u>caractérisation des fonctions constantes sur les intervalles</u>, théorème fondamental du Calcul intégral (TFCI), existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle. Existence (admise) et <u>unicité (démontrée)</u> d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Propriétés (algébriques et analytiques) de exp et ln, allure des courbes. Notation a^b si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

• <u>Résolution de $y' = ay$</u> avec $a : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continue. <u>Résolution de $y' = ay + b$ avec $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues, variation de la constante</u>.

• <u>Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$ si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$</u>. Résolution dans $\mathbb{R}$ si a, b, c sont réels et si $b^2 - 4ac < 0$. Forme $\mathrm{A}\cos(\omega t - \varphi)$. Résolution de $ay'' + by' + cy = m(t)$ si m est continue, variation de la constante.

• Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL d'ordre $k \geqslant 1$ quelconques, notion de condition de Cauchy. <u>Isomorphisme de Wronski associé à un réel t_0 : $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(k-1)(t_0))}$ et dimension de l'espace S_0 des solutions de l'homogène associée</u>.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 1}}$: exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14