Année 2024/25

Khôlle n° 1
semaine du 23 septembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Arcs paramétrés (ou fonctions vectorielles)

• Arc paramétré dans $\mathbb{R}^n$, support d'un arc et exemples de référence vus en cours (cercle, segment, droite, hélice, graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Produit scalaire canonique et norme associée sur $\mathbb{R}^n$, inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire. Limite d'un arc en un point adhérent à son domaine de définition (qui sera une réunion finie d'intervalles). Caractérisation des limites par les fonctions composantes. Arc continu sur son ensemble de définition, caractérisation de la continuité par les fonctions composantes. Sous-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$. Vu en TD : cas des arcs à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: on identifie une matrice de taille (n, p) avec un np-uplet de réels.

• Arc paramétré dérivable. Approximation affine. Caractérisation de la dérivabilité par les fonctions composantes. Linéarité de la dérivation. Classe $\mathscr{C}^k$, $\mathscr{C}^\infty$. Dérivée de $\gamma \circ \alpha$ avec $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dérivée de $t \mapsto \lambda(t) \cdot x$ avec $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ fixé. Dérivée de $t \mapsto \mathrm{L}(\gamma(t))$ et de $t \mapsto \mathrm{B}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ avec L linéaire et B bilinéaire. Applications : dérivée d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel. À savoir refaire : si $\mathrm{M}(t)$ est un point mobile parcourant un cercle de centre O, alors $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Dérivée k-ième de $\mathrm{B}(\gamma_1, \gamma_2)$ (Leibniz).

• Notion de champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, continuité. Circulation d'un champ de vecteurs continu $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ le long d'un arc γ de classe $\mathscr{C}^1$. Notations $\int_\gamma \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$, $\oint_\gamma \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$. Le cas continu et $\mathscr{C}^1$ par morceaux a été vu en TD.

2 Équations différentielles linéaires scalaires

• Rappels essentiels d'Analyse : bornes supérieure/inférieure, propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, théorème de la limite monotone, des suites adjacentes, de Bolzano-Weierstrass, des bornes atteintes, de l'extrémum local, de Rolle, théorème des accroissements finis (TAF), inégalité des accroissements finis (IAF), caractérisation des fonctions constantes sur les intervalles, théorème fondamental du Calcul intégral (TFCI), existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle : elles diffèrent d'une constante.

• Existence (admise) et unicité (démontrée) d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Propriétés (algébriques et analytiques) de exp et ln, allure des courbes. Savoir démontrer que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous réels x et y. Notation a^b si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Croissances comparées : savoir démontrer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

• Résolution de $y' = ay$ avec $a : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continue. Résolution de $y' = ay + b$ avec $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continue, variation de la constante.

• Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$ si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Résolution dans $\mathbb{R}$ si a, b, c sont réels et si $b^2 - 4ac < 0$. Résolution de de $ay'' + by' + cy = m(t)$ si m est continue, variation de la constante.

• Théorème de Cauchy linéaire pour les EDL d'ordre $k \geqslant 1$ quelconques, notion de condition de Cauchy. Isomorphisme de Wroński $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(k-1)}(t_0))$ et dimension de l'espace des solutions de l'homogène associée.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 0}}$ (document de travail de vacances) : tout. **Alphabet grec**, savoir énoncer des définitions, des théorèmes, syntaxe, grammaire et orthographe, locutions malvenues : « du coup », « en vrai », « pour moi », « au final », bon usage des quantificateurs, confusion entre f et $f(x)$, etc.

$\boxed{\text{TD 1}}$: exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 17.