Année 2025/26

Khôlle n° 1
semaine du 22 septembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Arcs paramétrés (ou fonctions vectorielles)

• Arc paramétré dans $\mathbb{R}^n$, support d'un arc et exemples de référence vus en cours ou en TD (cercle, demi-hyperbole, segment, hélice, graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Produit scalaire canonique et norme associée sur $\mathbb{R}^n$, inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire. Limite d'un arc en un point adhérent à son domaine de définition (qui sera une réunion finie d'intervalles). Caractérisation des limites par les fonctions composantes. Arc continu sur son ensemble de définition, caractérisation de la continuité par les fonctions composantes. Sous-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$. Cas des arcs à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: on identifie une matrice de taille (n, p) avec un np-uplet de réels.

• Arc paramétré dérivable. Approximation affine. Caractérisation de la dérivabilité par les fonctions composantes. Linéarité de la dérivation. Sous-espaces $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$. Dérivée de $\gamma \circ \alpha$ où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dérivée de $t \mapsto \lambda(t) \cdot x$ avec $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ fixé. Dérivée de $t \mapsto \mathrm{L}(\gamma(t))$ et de $t \mapsto \mathrm{B}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ avec L linéaire et B bilinéaire. Applications : dérivée d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel. À savoir refaire : si $\mathrm{M}(t)$ est un point mobile parcourant un cercle de centre O, alors $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Formule de Leibniz : dérivée k^{e} de $\mathrm{B}(\gamma_1, \gamma_2)$.

2 Équations différentielles linéaires (EDL)

• Rappels essentiels d'Analyse : bornes supérieure/inférieure, propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, théorème de la limite monotone, des suites adjacentes, de Bolzano-Weierstrass, des bornes atteintes, de l'extrémum local, de Rolle, théorème des accroissements finis (TAF) (non valide pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$: savoir pourquoi), inégalité des accroissements finis (IAF) (valide pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$), caractérisation des fonctions constantes sur les intervalles, théorème fondamental du Calcul intégral (TFCI ou TFA), existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle : elles diffèrent d'une constante. Théorème de la limite de la dérivée.

• Existence (admise) et unicité (démontrée) d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Propriétés (algébriques et analytiques) de exp et ln, allure des courbes. Savoir démontrer que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous réels x et y. Notation a^b si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Croissances comparées : savoir démontrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, connaître les autres croissances comparées.

• Savoir définir ce qu'est une équation différentielle, reconnaître parmi les équations fonctionnelles celles qui ne sont pas des équations différentielles. Savoir définir la notion d'EDL d'ordre k.

• Résolution de $y' = ay$. Méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de $y' = ay + b$. Résolution complète de $y' = ay + b$.

• Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$ si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Résolution dans $\mathbb{R}$ si a, b, c sont réels et si $b^2 - 4ac < 0$. Aucune connaissance exigible sur la variation des constantes.

• Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL d'ordre k, notion de conditions de Cauchy. L'ensemble des solution de l'équation homogène associée est un sev de $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ de dimension k.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 0 (document de travail de vacances) : tout. **Alphabet grec**, savoir énoncer des définitions, des théorèmes, syntaxe, grammaire et orthographe, locutions malvenues : « du coup », « en vrai », « pour moi », « au final », « **on a que** », bon usage des quantificateurs, confusion entre f et $f(x)$, etc.

TD 1 : exercices 1, 2, 3, 6, 7, 8. Les 10 et 12 sont à chercher pour lundi 22 sept. et seront corrigés ce jour.