Sommes et intégrales célèbres

Somme arithmétique. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (K. F. Gauss, à 10 ans !)

Somme des carrés. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Somme des cubes. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (Al-Karaji, $\sim$ 1000 ap. J.-C.)

Somme géométrique. $\sum_{k=n_0}^{n} q^k = q^{n_0}\frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}$ (si $q \neq 1$ et $n_0 \leqslant n$).

Si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Somme des coefficients binomiaux. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Somme alternée des coeff. binomiaux. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

Somme des inverses des nombres premiers. $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = +\infty$.

Somme des inverses. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Plus précisément, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $\gamma \approx 0,577$.

Somme alternée des inverses. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Mais l'ordre de sommation est important !

Somme des inverses des carrés. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler, 1735).

Somme des inverses des bicarrés. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Somme des inverses des cubes. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \notin \mathbb{Q}$ (Apéry, 1978).

La fonction de Riemann est $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ (si $p > 1$).

Somme des inverses des factorielles. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

Si $z \in \mathbb{C}$, on a plus généralement $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z$.

Sommes et intégrales célèbres

Série de Bertrand. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} < +\infty$ ssi $\left[\begin{array}{l}\alpha > 1\\ \text{ou}\\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\end{array}\right.$

Intégrales de Bertrand. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln^\beta(x)} < +\infty$ ssi $\left[\begin{array}{l}\alpha > 1\\ \text{ou}\\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\end{array}\right.$

Intégrales de Bertrand (bis). $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha |\ln(x)|^\beta} < +\infty$ ssi $\left[\begin{array}{l}\alpha < 1\\ \text{ou}\\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\end{array}\right.$

Intégrale de Dirichlet. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Intégrale de Dirichlet (bis). $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x = -\pi\frac{\ln(2)}{2}$

Intégrales d'Euler (1re espèce). $\displaystyle B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$

Intégrales d'Euler (2e espèce). $\displaystyle\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$

Intégrales de Fresnel. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Intégrale de Gauss. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Intégrale de Raabe. $\displaystyle\int_0^1 \ln(\Gamma(x))\mathrm{d}x = \frac{\ln(2\pi)}{2}$

Intégrales de Wallis. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Intégrales de Poisson. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1],\\ 4\pi\ln(|x|) & \text{sinon.}\end{cases}$