

Fiche n° 6

UN PEU DE CALCUL



Un Suanpan (boulrier chinois).

De nombreux exercices de calculs (fractions, puissances, factorisation, etc.) se trouvent sur

<https://vrohart.e-monsite.com/pages/classe-de-psi/travail-de-vacances-p1-p2b.html>

Exercice 1 Après avoir utilisé des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes (à détailler obligatoirement), factoriser le plus possible le déterminant suivant.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}.$$

Exercice 2 Soit α un réel.

1. Déterminer toutes les primitives de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$. On devra distinguer le cas $\alpha = 1$.
2. En déduire les valeurs de α pour lesquelles $\int_1^A \frac{dt}{t^\alpha}$ tend vers une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$.
3. En déduire aussi les valeurs de α pour lesquelles $\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ tend vers une limite finie quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Exercice 3 Dériver les fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \int_0^x t^2 dt, \quad g : x \mapsto \int_x^1 t^2 dt, \quad h : x \mapsto \int_{x^2}^{\cos(x)} t^2 dt.$$

Indication : réviser le théorème fondamental de l'Analyse.

Exercice 4 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

Indication : on essaiera de faire apparaître la forme $\frac{u'}{u}$ dans un premier temps. Ensuite, il faudra mettre $x^2 + x + 1$ sous forme canonique et savoir trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x+a)^2+c^2}$.

Exercice 5 À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^A x e^{-x} dx$$

pour tout réel A , puis déterminer la limite de cette intégrale quand $A \rightarrow +\infty$.

Exercice 6 1. Démontrer que $\tan' = 1 + \tan^2$, et en déduire la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(\vartheta) d\vartheta.$$

2. À l'aide d'un changement du variable $t = \tan(\vartheta)$, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3(\vartheta) d\vartheta.$$

Indication : on devra savoir faire la division euclidienne de X^3 par $X^2 + 1$, puis savoir intégrer $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.

Exercice 7 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

1. Calculer I_2 .
2. Expliquer pourquoi pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x dans $[1, 2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.
3. En déduire un encadrement de I_n , puis étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 2}$.

Exercice 8 Donner un équivalent de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 5 de

$$e^x, \quad \ln(1+x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad (1+x)^\alpha,$$

où α est une constante. En déduire celui de $\cos(x)e^{-x}$.

Exercice 10 Donner un équivalent de $\sin(x^3) - \cos(2x) + 1$ quand x tend vers 0.

Exercice 11 Soit $a \in \mathbb{R}$. Grâce à un équivalent, trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Méthode : quand un exposant « varie », comme ici, on repasse par la forme exponentielle, $a^b = e^{b \ln(a)}$.

Exercice 12 Pour chaque entier naturel non nul n , on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En étudiant les variations sur $[0, 1]$ des fonctions

$$f : x \mapsto e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto f(x) + \frac{x^n}{n!},$$

démontrer que $e - \frac{e}{n!} < S_n < e$. En déduire la convergence de (S_n) et sa limite.

2. On considère alors la suite (T_n) où $T_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n < e < T_n.$$

3. En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$. Sans calculatrice, déterminer une valeur approchée e à 10^{-2} près.

Exercice 13 On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. On considère les événements suivants.

- A : « On obtient pile au 1^{er} lancer ».
- B : « On obtient face au 2^e lancer ».
- C : « On obtient la même chose aux deux lancers ».

Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 14 On considère qu'une année comporte 365 jours. On suppose que les dates d'anniversaires sont équiprobables (ce qui est faux dans la pratique, mais cela permet de simplifier le problème).

1. Dans une classe de 35 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves soient nés le même jour ?
2. Combien une classe doit-elle comporter d'élèves pour que cette probabilité dépasse 90 % ?

Exercice 15 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω , et soit A, B, C trois événements. Montrer que $P(A \cup B \cup C)$ est égal à

$$\begin{aligned} &P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$