

Fiche n° 5

LES RAISONNEMENTS

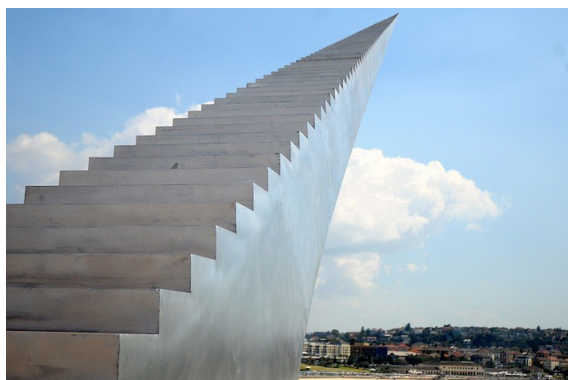


Illustration du principe de récurrence.

Table des matières

1	Les mots de liaison	2
2	Par l'absurde	2
3	Par contraposée	2
4	Par disjonction de cas	3
5	Par analyse-synthèse	3
6	Par récurrence	4
7	Exercices	5

1 Les mots de liaison

Un raisonnement **s'articule** grâce à des mots de liaisons. Ne pas les mettre rend incompréhensibles vos affirmations et vos calculs. En grammaire, le style consistant à n'employer aucun mot de liaison s'appelle *l'asyndète*.

$$x^2 + 5x - 1 = 0.$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) = 29.$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}.$$

Mauvaise rédaction

Réolvons l'équation $x^2 + 5x - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) = 29$.

Ainsi, les solutions sont $\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$ et $\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$.

Bonne rédaction

2 Par l'absurde

Utilité : démontrer une implication $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$.

Principe : démontrer $\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B} \implies \mathcal{F}$ où $\mathcal{F} \equiv \mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{B}$ est une assertion fausse. Ainsi, il faut supposer $\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}$ et orienter ses raisonnements afin de trouver une absurdité.

Rédaction recommandée :

Supposons $\mathcal{A}$. Imaginons un instant $\neg \mathcal{B}$.

[Faire des raisonnements.]

Conclure par : « c'est absurde. Ainsi, $\neg \mathcal{B}$ est fausse si bien que $\mathcal{B}$ est vraie. »

Exemple. Démontrer que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$.

L'implication est cachée ici : $\forall x \in \mathbb{R}, \left[x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \implies x \notin \mathbb{Q} \right]$.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Supposons que $x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$. Imaginons un instant que $x \in \mathbb{Q}$. Puisque $x > 0$, on disposerait alors de deux entiers n et p dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{n}{p}$, si bien que $p \ln(3) = n \ln(2)$ c'est-à-dire $\ln(3^p) = \ln(2^n)$. En composant par exp on obtiendrait $3^p = 2^n$. Or 3^p est impair (car $p \in \mathbb{N}^*$) et 2^n est pair (car $n \in \mathbb{N}^*$), donc c'est absurde. En conclusion, $x \notin \mathbb{Q}$.

Rappel de vocabulaire. Si une implication $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ est vraie,

- l'assertion $\mathcal{A}$ s'appelle la prémisse ou condition **suffisante** : on dit qu'il suffit d'avoir $\mathcal{A}$ pour avoir $\mathcal{B}$.
- l'assertion $\mathcal{B}$ s'appelle la conclusion ou condition **nécessaire** : on dit que pour que $\mathcal{A}$ soit vraie il faut que $\mathcal{B}$ soit vraie.

En grammaire, $\mathcal{A}$ s'appelle la protase et $\mathcal{B}$ l'apodose. Par exemple dans la phrase « si je suis malade, je n'irai pas en cours », la proposition subordonnée « si je suis malade » est la protase, tandis que la proposition principale « je n'irai pas en cours » est l'apodose.

3 Par contraposée

Utilité : démontrer une implication $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$.

Principe : démontrer $\neg \mathcal{B} \implies \neg \mathcal{A}$.

Rédaction recommandée :

« Supposons $\neg \mathcal{B}$ ».

[Faire des raisonnements.]

Conclure par : « on a donc montré $\neg \mathcal{A}$ », et par contraposée, on a montré $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$.

Exemple. Démontrer que pour tout entier naturel n , si n^2 est impair, alors n aussi. On cherche à démontrer l'implication

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \in 2\mathbb{N} + 1 \implies n \in 2\mathbb{N} + 1.$$

où $2\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des nombres impairs.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons que n ne soit pas impair : il est donc pair. On dispose donc d'un entier p tel que $n = 2p$, si bien que $n^2 = 4p^2 = 2p'$ où $p' = 2p^2$. Puisque $p' \in \mathbb{N}$, n^2 est pair, c'est-à-dire n^2 n'est pas impair.

4 Par disjonction de cas

Exemple. Démontrer qu'il existe deux irrationnels strictement positifs a et b tels que a^b soit rationnel.

Considérons le réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (défini comme étant $e^{\sqrt{2}\ln(\sqrt{2})}$). De deux choses l'une.

- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, dans ce cas on pose $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ et on a gagné.
- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel, dans ce cas on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ de sorte que

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$$

et on a gagné.

Dans tous les cas on a montré l'existence demandée.

5 Par analyse-synthèse

Utilité : montrer l'existence (et parfois l'unicité) d'un objet dont on n'a aucune idée de la valeur.



C'est le raisonnement de l'inspecteur de police qui recherche les auteurs d'un crime. Dans l'**analyse**, il se dit : « si untel est le criminel, quelles caractéristiques peut-il avoir ? Est-ce un homme ? Est-il (ou elle) jeune ? Etc. » Une fois l'analyse terminée, il convoque les suspects, les candidats possibles et fait la **synthèse** : il vérifie un par un ces candidats pour savoir s'ils sont coupables ou non. Tout peut arriver : ne trouver qu'un seul criminel, en trouver plusieurs, en trouver finalement aucun (ce n'était donc pas un crime, mais un accident).

Analyse : on suppose trouvé un objet solution du problème. On passe en revue ce que doit vérifier cet objet. On conclut : si un tel objet existe, alors **nécessairement** (analyse - Nécessaire) ce ne peut être que ceci, ceci ou cela.

Synthèse : on passe au crible les candidats précédemment trouvés. On en élimine, ou on les garde tous. S'il n'en reste qu'un, on a prouvé l'unicité de la solution, mais ce n'est pas toujours le cas. Cette phase est l'étude des conditions **Suffisantes** (Synthèse) pour qu'un objet soit solution.

Exemple. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire, de façon unique, comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Analyse : supposons trouvées S symétrique et A antisymétrique telles que $M = S + A$. On aura alors $M^T = S^T + A^T = S - A$. Ainsi, $M + M^T = 2S$ et $M - M^T = 2A$. En conclusion, si S et A existent, elles ne peuvent être égales qu'à $\frac{1}{2}(M + M^T)$ et $\frac{1}{2}(M - M^T)$ respectivement. Dit autrement, si elles existent bien, elles sont uniques.

Synthèse : posons $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. On a alors

- $S^T = \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$, donc S est symétrique.

- $A^T = \frac{1}{2}(M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$, donc A est antisymétrique.
- $S + A = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = M$.

En conclusion, il existe un unique couple (S, A) de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

6 Par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer en une seule fois une infinité de propositions. Il repose sur le principe suivant, que l'on admet ¹.

Principe de récurrence

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vraies.

- $0 \in \mathbb{N}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, [n \in A \implies n + 1 \in A]$,

alors $A = \mathbb{N}$.

Intuitivement : si l'on sait monter sur la première marche d'un escalier (la marche n° 0) et si l'on sait monter une marche dès lors qu'on a réussi à monter sur la précédente, alors on sait gravir tout l'escalier. Si l'escalier possède un nombre fini de marches, ce fait est banal. L'intérêt du principe de récurrence est qu'il est vrai pour un escalier infini !

On applique généralement ce principe de récurrence pour démontrer qu'une infinité de propositions $\mathcal{P}_n$, paramétrées par un entier naturel, sont vraies. Il existe différentes variantes qui ont leur utilité propre dans des situations différentes.

La récurrence simple consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}_n\}.$$

La rédaction recommandée est la suivante.

- Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathcal{P}_n$.
- Initialisation : montrer $\mathcal{P}_0$. En général c'est assez facile.
- Hérité : « Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathcal{P}_{n+1}$.

PIÈGE !

On trouve souvent la rédaction fautive suivante au début de l'hérité :

« Supposons qu'il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. »

ou bien, ce qui revient au même,

« Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un certain entier n . »

C'est une erreur car l'axiome de l'hérité est

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}, [n \in A \implies n + 1 \in A]$$

et non $\exists n \in \mathbb{N}, [n \in A \implies n + 1 \in A]$.

1. Il résulte immédiatement d'un axiome de la théorie des ensembles : *l'axiome de l'infini*, et de la construction de $\mathbb{N}$ (hors programme).

La récurrence double consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}_n \wedge \mathcal{P}_{n+1}\}.$$

Elle est utilisée pour démontrer des propriétés concernant des suites définies par des relations de récurrence d'ordre 2. La rédaction recommandée est la suivante.

- Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathcal{P}_n$.
- Initialisation : montrer $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$. En général c'est assez facile.
- Hérité : « Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathcal{P}_{n+2}$.

La récurrence forte consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{P}_n\}.$$

Elle est utilisée quand les types précédents de récurrences sont inopérants, c'est-à-dire quand, pour montrer $\mathcal{P}_n$, on a besoin d'avoir montré $\mathcal{P}_k$ avec $k < n$ (mais on ne sait pas lequel!).

- Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathcal{P}_n$.
- Initialisation : montrer $\mathcal{P}_0$. En général c'est assez facile.
- Hérité : « Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_k$ pour tout $k \leq n$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathcal{P}_{n+1}$.

7 Exercices

Exercice 1 Un élève souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $6^n - 1$ est un multiple de 5. Il écrit :

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété « $\forall n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ est un multiple de 5 ».

$\mathcal{P}_0$ est vraie car $6^0 - 1 = 0$ et 0 est bien un multiple de 5.

(...)

Expliquer pourquoi sa rédaction est incorrecte.

Exercice 2 Un élève veut résoudre l'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$. Pour cela, il écrit :

$$\begin{aligned} \ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2) &\iff \ln(x(x+1)) = \ln(2) \\ &\iff x(x+1) = 2 \\ &\iff x^2 + x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Il résout alors $x^2 + x - 2 = 0$ en calculant le discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$, et trouve deux solutions : $\frac{-1-3}{2} = -2$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$. Et il se dit : « mince alors, c'est impossible : -2 ne convient pas car $\ln(-2)$ n'existe pas ! ».

Expliquer l'erreur logique de cet élève.

Exercice 3 Voici un énoncé mathématique volontairement hors de portée d'un élève de CPGE :

Soit M une variété différentielle lisse. Pour tout point m de M , il existe un entier naturel non nul n et un voisinage de m homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

1. Si l'on souhaite démontrer cet énoncé grâce à un raisonnement par l'absurde, quel serait le début de la rédaction de cette démonstration ?
2. Si l'on souhaite démontrer cet énoncé grâce à un raisonnement par analyse-synthèse, quel serait le début de la rédaction de cette démonstration ?
3. Pourquoi un raisonnement par récurrence n'est-il pas possible ?