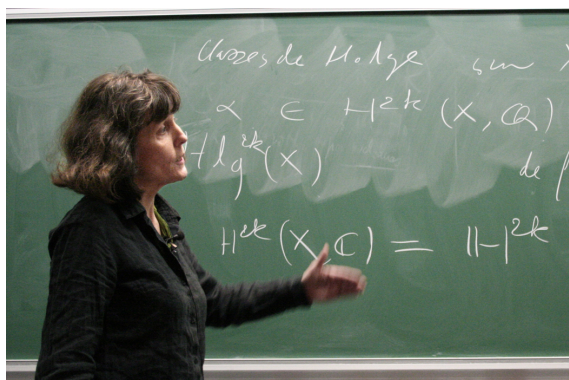


Fiche n° 4

DÉFINITIONS ET THÉORÈMES



La mathématicienne Claire Voisin.

Table des matières

1	Énoncer une définition	2
2	Énoncer un théorème	4
3	Exercices	5

1 Énoncer une définition

Ce sera mon combat en début d'année (et parfois jusqu'au bout avec certains qui refusent de comprendre). Partons d'un exemple non mathématique pour situer le problème. Si je vous demande ce qu'est un penalty au football, il n'est pas possible de répondre

✗ *Un penalty, ~~c'est quand~~ un joueur fait une faute grave et qu'il est dans la surface de réparation de son équipe.*

Premièrement, « c'est quand » est de registre familier. Ensuite, on ne sait toujours pas ce qu'est un penalty ; on sait quelle situation en provoque un, mais on ne sait pas si c'est un cri de joie, un chiffon de couleur, ou une girafe.

Vous faites cette erreur systématiquement en mathématiques. Voici une définition (parmi d'autres) correcte d'un penalty.

✓ Un *penalty* est une sanction infligée à l'équipe d'un joueur ayant commis une faute grave alors qu'il était dans la surface de réparation de sa propre équipe.

Maintenant, on sait ce qu'est un penalty : c'est avant tout une sanction. La suite de la définition explique dans quelles conditions cette sanction est infligée. On peut la continuer en précisant en quoi consiste la sanction, mais ce n'est pas le problème ici. En mathématiques, il faut donc, de la même façon, annoncer **le type de l'objet** que l'on veut définir. Les types d'objets en mathématiques sont assez limités :

- les ensembles, qui, de façon théorique, constituent le seul type d'objet mathématique : presque tous les objets sont des ensembles plus ou moins déguisés. Oui, les nombres sont des ensembles plus ou moins sophistiqués ;
- les vecteurs ;
- les fonctions ;
- les matrices (qui sont des fonctions particulières) ;
- les couples, les triplets, les n -uplets, les suites, les familles (qui sont des fonctions particulières) ;
- les polynômes (qui sont des suites particulières).
- etc.

Il y a plusieurs façons d'énoncer une définition. Les modèles suivants représentent l'écrasante majorité des cas rencontrés dans un cours : entraînez-vous à les reproduire.

On appelle [machin] tout [truc] qui vérifie [blabla].

On dit que [truc] est un [machin] quand [blabla].

On dit que [truc] est [machinable] lorsque [blabla].

Un [truc] est dit [machinable] lorsque [blabla].

On appelle [truc machinable] tout [truc] tel que [blabla].

Un [machin] est un [truc] qui possède la propriété [bidule].

PIÈGE !

On ne met pas de « si et seulement si » dans une définition : on réserve cela pour les théorèmes qui caractérisent, c'est-à-dire décrivent l'objet par des conditions nécessaires et suffisantes.

Exemples.

- ☒ Une matrice nilpotente ~~c'est quand on a~~ $M^k = 0$.
- ☒ Une matrice nilpotente, ~~c'est par exemple quand~~ [...]
- ☒ ~~Pour moi~~, une matrice nilpotente ~~c'est quand~~ une puissance est nulle.
- ☒ C'est $M^k = 0$.
- ✓ Une matrice carrée est dite *nilpotente* quand une de ses puissances est nulle.
- ✓ On dit qu'une matrice carrée est *nilpotente* lorsque l'une de ses puissances est nulle.
- ✓ On appelle *matrice nilpotente* toute matrice carrée dont une puissance est nulle.
- ✓ Soit M une matrice carrée. On dit que M est *nilpotente* s'il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0$.

Il faut bien distinguer les trois notions suivantes.

- La **définition** d'un objet : une phrase qui explique précisément et sans ambiguïté ce qu'est ledit ¹ objet.
- Le **nom** de l'objet : c'est le mot qui permet de l'appeler. En aucun cas ce mot ne définit l'objet !
- La **notation** de l'objet : c'est le symbole qui désigne l'objet.

Exemple. Le conjugué d'un nombre complexe z .

- **définition** : c'est le nombre complexe qui a la même partie réelle que z , mais une partie imaginaire opposée à celle de z .
- **nom** : ce nombre est appelé *conjugué* de z .
- **notation** : on note ce nombre $\bar{z}$.

✓ **Définition correcte.** On appelle *conjugué* d'un nombre complexe z , le nombre complexe noté $\bar{z}$ égal à $\Re(z) - i\Im(z)$.

☒ **Définition incorrecte.** Le conjugué de z , c'est $\bar{z}$.

- Qui est ce z au début de la phrase ? On doit deviner que c'est un nombre complexe ? Observer la différence avec la définition correcte.
- On sait seulement comment on note le conjugué de z . On ne sait toujours pas comment il est défini. Avec cette définition, il est impossible de savoir ce que vaut $\overline{1 + 2i}$.

☒ **Définition incorrecte.** Le conjugué de z , c'est $\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z)$.

- Qui est ce z au début de la phrase ?
- Où est la locution « On appelle » ou « On dit que » quasiment obligatoire dans une définition ?

1. En un seul mot, tout comme *lequel*.

2 Énoncer un théorème

Étymologies grecques (sachez lire un mot grec : il suffit de bien connaître l'alphabet !)

- τὸ θεῶρμα : ce qu'on peut contempler, d'où spectacle, objet de méditation, d'où règle, principe.
Du verbe θεωρέω : contempler (même racine que θεάτρον : le théâtre).
- ἡ θέσις : action de poser, d'instituer. D'où affirmation.
Du verbe τίθημι : poser.
- ὑπό : en dessous. Ainsi, hypothèse : ce qu'on pose en dessous, pour servir de fondement.
- τὸ λῆμμα : Tout ce qu'on prend ou reçoit, d'où l'une des prémisses d'un syllogisme, et par extension l'un des arguments d'une preuve.
Du verbe λαμβάνω : prendre.

Étymologies latines

- *probare* : essayer, examiner, vérifier, reconnaître. D'où preuve.
- *corolla* : petite couronne. D'où énoncé qui tourne autour du théorème précédent, donc une conséquence.

Un **théorème** est composé de trois parties :

1. **La présentation des objets** : on utilise « soit » (invariable) dans le sens de « considérons ». **Exemple.** Soit ABC un triangle.
2. **Les hypothèses que l'on fait sur lesdits objets** : on utilise « si » ou « supposons que ». **Exemple.** Si ABC est rectangle en A.
3. **La ou les conclusion(s)** : introduite(s) par « alors », ou tout autre mot conclusif. **Exemple.** Alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Souvent, le théorème a un **nom** : ici le théorème de Pythagore.

Pour utiliser un théorème lors d'un exercice on doit : s'assurer que les **objets** concernés vérifient les **hypothèses** dudit théorème, et enfin, et seulement après ces vérifications, énoncer la **conclusion** en invoquant le nom du théorème s'il en a un à l'aide de « par », « grâce à » ou « en vertu de ».

Exemple. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

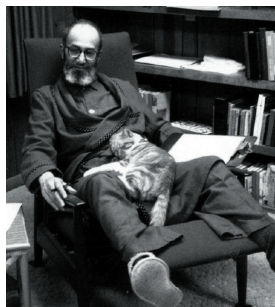
$$\boxtimes f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

- Qui sont n , f , I , a , x ? (Les lettres k et t étant ici muettes, elles ne doivent pas être présentées).
- La fonction f est-elle quelconque ? Doit-on deviner que I est un intervalle parce qu'il s'appelle I , ou que « habituellement » une fonction est définie sur un intervalle ?

✓ Soit I un intervalle de longueur non nulle, a un élément de I , n un entier naturel et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

On ferme aujourd'hui une démonstration par le symbole $\square$ ou $\blacksquare$ appelé *halmos*, du nom du mathématicien Paul Halmos (1916-2006).



C.Q.F.D. (ce qu'il fallait démontrer) est franchement démodé.

Q.E.D. (*quod erat demonstrandum*) est surtout utilisé aux États-Unis, mais pas en France. C'est la traduction latine de la locution grecque originelle ci-dessous.

O.E.Δ. (ὅπερ εἶδει δεῖξαι) était écrit la fin des démonstrations dans les *Éléments* d'Euclide (III^e siècle av. J.-C.).

3 Exercices

Exercice 1 Expliquer tout ce qui ne va pas dans cette tentative d'énoncer le théorème du rang.

Le théorème du rang c'est quand $\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$ avec f une application linéaire.

Exercice 2 Expliquer tout ce qui ne va pas dans cette tentative d'énoncer la définition d'une fonction paire.

Une fonction paire, c'est $f(-x) = f(x)$.

Exercice 3 Énoncer les théorèmes suivants vus en première année en respectant la présentation des objets, la présentation des hypothèses et celle de la conclusion.

1. Le théorème du rang.
2. Le théorème de Rolle.
3. Le théorème des valeurs intermédiaires.
4. Le théorème des accroissements finis.
5. L'inégalité des accroissements finis.
6. La formule de Grassmann donnant la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels.
7. La formule d'intégration par parties.

Vérifier ensuite vos réponses avec votre cours de première année.

Exercice 4 Énoncer les définitions suivantes vues en première année en respectant la syntaxe imposée dans ce cours.

1. Quand dit-on qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point a ?
2. Quand dit-on qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante sur une partie D ?
3. Quand dit-on qu'une matrice carrée est antisymétrique ?