

Fiche n° 3
LES TYPES D'OBJETS



Les erreurs les plus fréquentes rencontrées dans les copies d'élèves sont des erreurs de *typage*, dirait-on en informatique. J'entends par là le fait d'écrire une égalité

$$A = B$$

où A et B sont des objets de natures (= de types) différentes.

Exemple. Lors d'une intégration par parties, si vous posez $u = x^2$, il y a deux problèmes :
— on ne sait pas qui est ce x . On imagine bien que c'est un réel, mais lequel ?
— il est hors de question de parler de u' . Pourquoi ? Parce qu'on dérive une fonction, et u est présentée comme étant égale à un nombre, et un nombre, ce n'est pas une fonction.

Ce genre d'erreur bloque totalement votre progression en mathématiques, rend flous tous les concepts que vous tentez d'apprendre, et accessoirement vous fait perdre un grand nombre de points en D.S. (je mets zéro à la question avec la mention « non-sens »).

Table des matières

1	Les ensembles	2
1.1	Écriture en extension	2
1.2	Écriture en compréhension	3
2	Les fonctions	4
2.1	Les suites, les familles	5
2.2	D'autres types d'objets	6
3	Exercices	7

1 Les ensembles

Si les mathématiques étaient un jeu de plateau, les ensembles en seraient les pièces. Aux échecs, on ne définit pas vraiment ce qu'est un Cavalier : seules importent les règles qui gèrent ses mouvements. Si l'on perd cette pièce du jeu, ce n'est pas grave, on peut la remplacer par un autre objet : un bouchon en liège par exemple. C'est bien la preuve qu'il n'est pas important de savoir ce qu'est un Cavalier, mais seulement les règles qui permettent de s'en servir.



Qu'est-ce qu'un Cavalier, au juste ?

Il en va de même en mathématiques où l'on ne définit pas la notion d'ensemble, même si son interprétation en termes de *sac* ou de *collection d'objets* est assez claire, mais on érige en axiomes les règles qui régissent la théorie des ensembles.

En plus de ces « pièces » que sont les ensembles, la théorie des ensembles fournit deux relations binaires :

$$= \quad \text{et} \quad \in.$$

La première ne présente plus. La deuxième s'appelle *l'appartenance* : si a et b sont deux ensembles tels que $a \in b$, on dira que a est un élément de b . L'interprétation naïve en termes d'élément d'une collection est normalement acquise depuis très longtemps, mais encore une fois, seuls les axiomes expliquent comment elle s'utilise ; l'interprétation ne doit pas prendre le dessus.

1.1 Écriture en extension

Le premier de tous les axiomes est appelé *axiome d'extension* et dit en substance que deux ensembles sont égaux exactement quand ils ont les mêmes éléments. Cela s'écrit

$$\forall a \forall b (a = b \iff (\forall x (x \in a \iff x \in b))).$$

Cet axiome permet de présenter un ensemble en listant ses éléments, comme sur une liste de courses :

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Puisque deux ensembles sont égaux quand ils ont les mêmes éléments, on notera que

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\} = \{4, 6, 0, 10, 8, 2\} = \{4, 4, 6, 0, 10, 8, 2, 2, 2\}.$$

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux,

- ou bien on raisonne directement **par équivalence** (possible dans les cas simples).
- ou bien on procède **par double inclusion** en adoptant la rédaction suivante :
 - Soit x dans E . Montrons que $x \in F$. Dire $x \in E$ c'est dire que [blabla].
 - Soit x dans F . Montrons que $x \in E$. Puisque $x \in F$, on peut dire que [blabla].

PIÈGE !

Il faut avoir compris que les ensembles $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ et $\{\{\emptyset\}\}$ sont trois ensembles différents.

L'ensemble $\emptyset$ est l'ensemble vide : c'est un ensemble qui n'a aucun élément. Par exemple, on peut imaginer un sac de courses, mais avec rien à l'intérieur.

L'ensemble $\{\emptyset\}$ est un ensemble qui ne possède qu'un seul élément (on parle de *singleton*). Cet unique élément se trouve être $\emptyset$. On peut imaginer un sac de courses contenant lui-même un sac en plastique, ce dernier ne contenant rien.

L'ensemble $\{\{\emptyset\}\}$ est lui aussi un singleton. Mais son unique élément est $\{\emptyset\}$, qui n'est évidemment pas $\emptyset$, comme on l'a expliqué au-dessus. Ainsi, $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$ puisque ces ensembles n'ont pas les mêmes éléments.



PIÈGE !

Un ensemble peut tout à fait contenir des objets de natures différentes.

Par exemple, $\{\mathbb{R}, \sqrt{2}, x \mapsto x^2\}$ est un ensemble contenant trois éléments : l'ensemble des nombres réels, un nombre réel et une fonction. L'assemblage

$$(x \mapsto x^2) \in \{\mathbb{R}, \sqrt{2}, x \mapsto x^2\}$$

est tout à fait correcte, même s'il « fait bizarre ¹ à lire ».

Remarque. En Python, l'écriture en extension est courante. Ici avec une liste :

```
>>> In : [2*k for k in range(6)]  
# On rappelle que range(n) s'arrête à n-1  
Out : [0, 2, 4, 6, 8, 10]
```

1.2 Écriture en compréhension

Plutôt que de présenter un ensemble en dressant la liste complète de ses éléments :

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \quad \text{ou encore} \quad \{2k : k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\},$$

il est souvent plus pratique, et parfois indispensable, de décrire les éléments de cet ensemble à l'aide d'une propriété :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, n = 2k\}.$$

C'est un fait général, qui constitue le deuxième axiome de la théorie des ensembles : si $\mathcal{P}(x)$ est une assertion dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E , il existe un ensemble (unique d'après l'axiome d'extension) dont les éléments sont les éléments de E tels que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie. Cet ensemble se note

$$\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\},$$

et on dit que c'est une *écriture en compréhension*.

On utilise traditionnellement $|$ pour la compréhension et $:$ pour l'extension (cf. exemples précédents).

1. Concept non mathématique : un assemblage est correct ou non, et s'il est correct il est vrai ou faux.

⚠️ PIÈGE !

L'écriture suivante est totalement interdite.

$$\{\forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}.$$

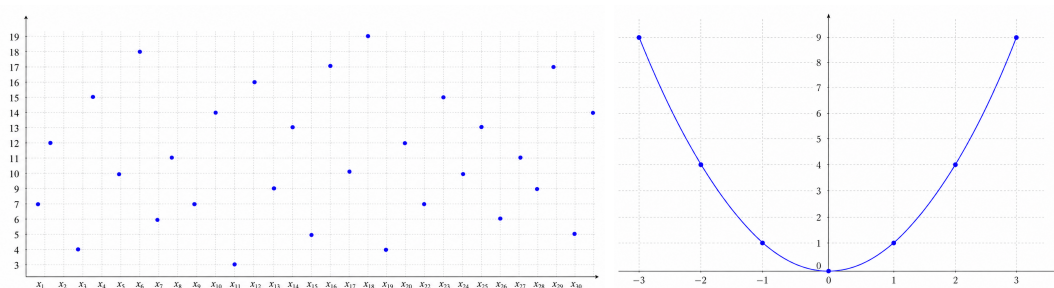
Un quantificateur ne peut jamais être à cette place dans l'écriture d'un ensemble. L'ensemble de tous les réels dont le carré est supérieur ou égal à 2 est simplement l'ensemble des réels dont le carré est supérieur ou égal à 2. On écrit donc

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}.$$

2 Les fonctions

Intuitivement², si E et F sont deux ensembles, une fonction de E dans F « consiste » à « associer » à certains éléments de E un, et un seul, élément de F. L'ensemble des éléments de E qui sont associés à un élément de F est appelé *ensemble de définition* de la fonction. Si x est dans l'ensemble de définition d'une fonction f , l'élément de F auquel il est associé se note $f(x)$. L'ensemble de toutes les images se note $\text{Im}(f)$.

Exemple 1. Soit f la fonction qui à chaque élève x de la P2B associe sa note au DS n° 1. On peut représenter la fonction f en numérotant les élèves de l'ensemble P2B : $x_1, x_2, \dots, x_{32}$, et en plaçant tous les couples $(i, f(x_i))$ dans un repère. Cet ensemble de couple est donc une partie de $\text{P2B} \times [0, 20]$: c'est le graphe de f .



Exemple 2. Soit f la fonction qui à chaque réel x associe son carré. On peut encore représenter la fonction f en plaçant tous les couples $(x, f(x))$ dans un repère : la courbe représentant le graphe de f est une parabole.

Il est possible de définir rigoureusement la notion de fonction : faisons-le ici si cela n'a pas été fait en première année.



Définition .

Soit E et F des ensembles. On appelle *fonction de E dans F* tout triplet

$$f = (E, F, \Gamma)$$

où Γ est une partie de $E \times F$, appelée *graphe* de f , vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \forall y' \in F, \left[\left((x, y) \in \Gamma \wedge (x, y') \in \Gamma \right) \implies y = y' \right].$$

2. Remarquez comment cette définition est bancal : on ne dit pas **ce qu'est** une fonction, on se contente de dire en quoi elle « consiste ». On n'explique d'ailleurs pas ce que veut dire « associer ». Mathématiquement, ce n'est pas recevable ; lire la fiche n° 4.

En conséquence, si $x \in E$, il y a **au plus un** élément y de F tel que $(x, y) \in \Gamma$. S'il existe, cet unique élément y se note $f(x)$ et s'appelle *l'image* de x par la fonction f .

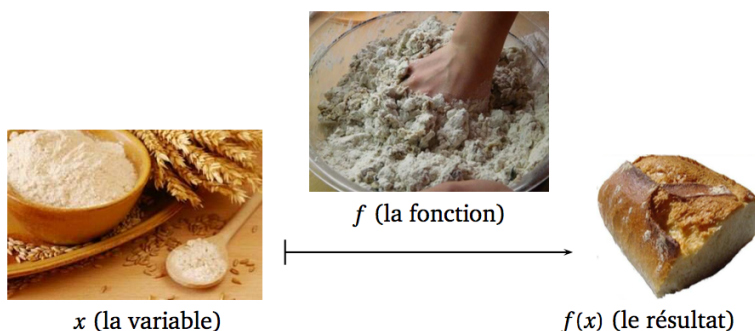
L'ensemble de définition de f est alors l'ensemble des éléments x de E qui possède une image par f : on le note D_f . Enfin, si $D_f = E$, on dit que la fonction f est une *application*.

Les fonctions forment donc un nouveau type d'objets mathématiques, à côté de celui d'objets bien connus : les nombres.

RÈGLE ABSOLUE

Il ne faut jamais confondre la fonction f et l'image $f(x)$.

Sur l'exemple illustré ci-après, la fonction est le boulanger : elle prend de la farine x , fait quelque chose (pétrir, cuire, etc.) et renvoie le résultat $f(x)$ qui est du pain. **Parler de « la fonction $f(x)$ » revient à dire des choses étranges telles que « le boulanger est trop cuit » ou « La baguette tradition m'a rendu la monnaie sur un billet de 10 euros ».**



❌ La fonction x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^2)' = 2x$.

❌ $\cos(x)$ est 2π -périodique.

✓ La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $x \mapsto 2x$.

✓ La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto x^2)' = x \mapsto 2x$ (un peu lourd).

✓ Si l'on note f la fonction $x \mapsto x^2$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

✓ Si l'on pose $f = x \mapsto x^2$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = x \mapsto 2x$.

✓ La fonction $\cos$ est 2π -périodique (on évite de commencer une phrase par un symbole mathématique).

⚠️ PIÈGE !

L'écriture $(X^2)' = 2X$ est tout à fait correcte dans l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes : il ne s'agit pas de fonctions, et $'$ ne désigne pas la dérivation habituelle !

2.1 Les suites, les familles

• Les suites sont des fonctions particulières : elles sont définies sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ ou une partie de la forme $[[n_0, +\infty[$. Les notations suivantes sont donc équivalentes.

— La suite u .

— La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (plus précise, car donne l'ensemble de définition). Si le contexte est clair, l'écriture « (u_n) » est possible aussi.

— La suite $n \mapsto u_n$ (peu utilisée).

- ☒ La suite u_n .
- ☒ u_n est croissante à partir du rang 3.
- ☒ u_n converge.

Rappel : on évite le plus possible de commencer une phrase par un symbole mathématique.

- ✓ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- ✓ La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est croissante.
- ✓ La suite (u_n) converge.

• Les familles généralisent les suites. Si I est un ensemble, on appelle *famille* indexée par I , toute application définie sur I . On retrouve donc les suites en prenant $I = \mathbb{N}$, ou $I = \mathbb{N}^*$, etc. On imite souvent la notion introduite pour les suites en écrivant

$$(x_i)_{i \in I}$$

une famille indexées par I .

2.2 D'autres types d'objets

• Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ (lettre désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui s'annule à partir d'un certain rang (ce rang n'étant pas forcément le même d'une suite à l'autre). On parle aussi de suite presque nulle, ou bien de suite à support fini. En effet, le support d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des entiers n tels a_n n'est pas nul. Le polynôme X est défini comme étant la suite

$$(0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots).$$

L'ensemble des polynômes se note $\mathbb{K}[X]$. On définit alors une addition et une multiplication : cf. cours de première année.

• Si n et p sont des entiers non nuls, on appelle matrice de format (n, p) à coefficients dans un ensemble E , toute application M de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ à valeurs dans E . On note fréquemment $[M]_{i,j}$ ou $m_{i,j}$ au lieu de $M(i, j)$. On représente souvent M par un tableau comme vous l'avez appris en première année : ce tableau n'est qu'une représentation de la matrice M , il ne faut donc pas croire qu'une matrice est un tableau ! D'ailleurs, on se demande bien comment serait défini mathématiquement la notion de « tableau » !

• De très rares objets ne sont pas des ensembles : il n'existe pas, par exemple, d'ensemble dont les éléments seraient tous les ensembles existants. On parle alors de *classe* de tous les ensembles, mais les axiomes de la théorie des ensembles ne s'appliquent pas à ce genre d'objets.

★ Théorème (*paradoxe de Russell*).

Il n'existe pas d'ensemble dont les éléments seraient tous les ensembles.

PREUVE. Imaginons un instant qu'un tel ensemble existe, notons-le U (comme univers ?), et montrons qu'au moins un des axiomes de la théorie des ensembles est bafoué.

Puisque U est un ensemble, l'axiome de compréhension assure l'existence de l'ensemble suivant :

$$\{x \in U \mid x \notin x\}.$$

Notons-le R , en honneur à B. Russell. De deux choses l'une :

- ou bien $R \in R$, dans ce cas la propriété caractérisant R donne $R \notin R$, ce qui est absurde ;
- ou bien $R \notin R$, dans ce cas la propriété caractérisant R n'est pas vraie, ce qui donne $R \in R$, ce qui est encore absurde ;

On a abouti alors à une contradiction, à moins que l'axiome de compréhension soit rejeté de la théorie, ou bien que l'on accepte qu'une proposition ne soit ni vraie ni fausse...

En conclusion, il n'existe pas de tel ensemble U . ■

3 Exercices

Exercice 1 Soit E l'ensemble $\{1, 2\}$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

$$1 \in E \quad \{1\} \in E \quad \{2\} \subset E \quad \emptyset \in E \quad \emptyset \subset E \quad \{\emptyset\} \subset E.$$

Exercice 2 (*pas si facile !*) Donner un exemple d'ensemble E possédant un élément a tel que $a \subset E$.

Exercice 3 (*autour de $\cup$ et $\cap$*) Soit E un ensemble, et A, B et C des parties de E . Montrer que :

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \iff B = C.$$

Exercice 4 (*autour de $\mathcal{P}(E)$*). On rappelle que si E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles de E .

1. Quelle est la différence entre $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ et $\mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$?
2. Décrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\{x\})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.

Exercice 5 Expliquer pourquoi cette rédaction est incorrecte. Corriger la phrase de plusieurs façons.

$$\text{Les solutions de } x^2 - x - 2 = 0 \text{ sont } \{-1, 2\}.$$

Indication : quel est le type d'objet de $\{-1, 2\}$?

Exercice 6 Expliquer pourquoi cette rédaction est toujours incorrecte.

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

$$S = \{-1, 2\}.$$

Exercice 7 Corriger les erreurs de typage des phrases suivantes.

1. La fonction x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^3)' = 3x^2$.
2. La fonction $\cos(x)$ est périodique.
3. Pour tout réel x , f est croissante.
4. Pour tout réel x , $f(x)$ est croissante.
5. La suite u_n est croissante.
6. On considère la droite d'équation $2x + 3$.

Exercice 8 Expliquer les non-sens mathématiques dans les phrases suivantes. Les rectifier.

1. Pour tout $i \in \mathbb{C}$, on a $i^2 = -1$.
2. Il existe i dans $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
3. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
4. $\forall x > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
5. Pour tout t dans $[0, 1]$, $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.
6. Pour tous k et n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
7. Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x)$ est continue.
8. Pour tout réel $x \geq 0$, f est croissante en x .

Exercice 9 Expliquer la différence entre $\mathbb{R}[X]^2$ et $\mathbb{R}^2[X]$. En particulier, si un élève veut considérer deux polynômes réels P et Q et écrit

$$\ll \text{ Soit } (P, Q) \in \mathbb{R}^2[X] \gg,$$

expliquer pourquoi c'est incorrect.

Exercice 10 Un élève veut écrire formellement l'ensemble de tous les réels dont l'exponentielle est strictement plus grande que 2. Il écrit **incorrectement**

$$\{\forall x \in \mathbb{R} \mid e^x > 2\}.$$

1. Expliquer son erreur et proposer une écriture correcte.
2. Écrire cet ensemble sous forme d'un intervalle.

Exercice 11 *Écrire les ensembles suivants en extension, puis en compréhension.*

1. L'ensemble des diviseurs positifs de 12.
2. L'ensemble des réels dont le carré vaut 2.
3. L'ensemble des réels dont le carré vaut -1 .
4. l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 20.
5. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, égales à leur propre dérivées.