

Fiche n° 2

USAGE DES QUANTIFICATEURS



Les mathématiques s'écrivent dans un langage possédant ses propres règles de syntaxe. Comme dans tout langage, il y a des règles et des abus concédés à l'usage.

Cette fiche se concentre sur l'usage des deux symboles $\forall$ et $\exists$ que vous connaissez déjà. Nous rappelons ici les quelques règles régissant leur usage.

Rappelons au passage que l'écriture « $\forall x \in E$ » est déjà une abréviation. L'écriture théoriquement correcte de

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

est

$$(\forall x)(x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0).$$

On comprend bien que l'on s'autorisera un minimum de souplesse pour que les assertions mathématiques restent lisibles.

Exemple. La définition de la convergence d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un réel ℓ s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

La syntaxe théoriquement correcte, que l'on n'écrit jamais, est cependant

$$(\forall \varepsilon) \left(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \implies \left[(\exists N) (N \in \mathbb{N} \implies [(\forall n) \implies ([n \in \mathbb{N} \wedge n \geq N] \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)]) \right] \right).$$

Règle n° 1

Toute variable se quantifie.

Ce n'est pas parce qu'une lettre s'appelle n qu'il est sous-entendu que c'est un entier quelconque.

Exemples.

☒ Soit $f(x) = \ln(x)$.

✓ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \ln(x)$.

☒ Un entier impair est un entier de la forme $2p + 1$.

✓ Un entier impair est un entier n tel qu'il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

✓ Un entier impair est un entier de la forme $2p + 1$, où $p \in \mathbb{N}$.

☒ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

✓ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n .

✓ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

☒ Résoudre $f'(x) = f(x)$.

On ne sait pas si la fonction f est donnée et que l'on doit trouver l'inconnue x , ou bien si c'est x qui est un réel donné, et que l'on doit trouver f , ou bien encore si l'on doit trouver f pour que l'égalité soit vraie pour tout x (c'est alors une équation différentielle).

✓ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donnée. Résoudre $f'(x) = f(x)$, d'inconnue x à chercher dans $\mathbb{R}$.

✓ Soit x un réel donné. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(x)$.

✓ Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x).$$

✓ Résoudre $f' = f$ d'inconnue f à chercher dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (identique au point précédent).

Règle n° 2

Les symboles $\forall$ et $\exists$ **ne sont pas des abréviations** à employer dans des phrases non mathématiques. Ils s'utilisent dans des formules, en général dans des définitions ou des théorèmes, souvent centrées et **toujours sur une seule ligne** : on **ne coupe pas** une quantification sur deux lignes.

Exemples.

✗ On sait que $\exists x \in \mathbb{C}$ ~~tel que~~ $x^2 = -1$

✓ On sait qu'il existe x dans $\mathbb{C}$ tel que $x^2 = -1$.

✓ On sait qu'il existe un nombre complexe dont le carré vaut -1 .

✓ On sait que $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$.

✓ On sait que

$$\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1.$$

✗ On sait que $\forall x \in \mathbb{R},$

$$x^2 \geq 0.$$

✓ On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

✓ On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

✓ On sait que tout réel a un carré positif (ou nul)¹.

1. En français, *positif* signifie ≥ 0 . En anglais, *positive* signifie > 0 . Pour dire ≥ 0 , les Anglo-Saxons disent *non-negative*.

Règle n° 3

Les symboles $\forall$ et $\exists$ se placent toujours à **gauche** de l'assertion sur laquelle ils portent, même si le français est plus souple. Il y a cependant une tolérance en cas d'un seul quantificateur $\forall$.

Exemple.

- ☒ On sait que $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (même si toléré).
- ✓ On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- ✓ On sait que pour tout réel $x, x^2 \geq 0$.
- ✓ On sait que $x^2 \geq 0$ pour tout réel x .

Règle n° 4

Les lettres qui suivent un quantificateur sont **muettes** : il n'a pas de sens de les utiliser en dehors de la quantification. C'est le même problème avec les variables locales d'un programme informatique : en dehors dudit programme, elles n'ont pas d'existence.

Exemples.

☒ On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, ~~donc~~ $x^2 + 1 \geq 1$.

Explication : le mot *donc* fait sortir de l'assertion quantifiée $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$: la lettre x n'existe plus sortie de cette formule.

✓ On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

✓ Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 + 1 \geq 0$.

☒ On sait que $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ ~~et même que~~ $x = \pm\sqrt{2}$.

✓ On sait que

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2.$$

✓ Si x est un réel tel que $x^2 = 2$, alors $x = \pm\sqrt{2}$.

Règle n° 5

La quantification $\exists$ peut se traduire en français autrement que par « il existe ».

La quantification $\forall$ peut se traduire en français autrement que par « pour tout » ou « quel que soit ».

Exemple 1. L'assertion $\exists z \in \mathbb{C}, z^2 = -1$ peut se traduire par

- L'équation $z^2 = -1$ (d'inconnue z) **admet** au moins une solution dans $\mathbb{C}$.
- Dans $\mathbb{C}$, -1 **possède** au moins une racine carrée.
- **On peut trouver** des nombres complexes dont le carré vaut -1 .
- **Il est possible**, dans $\mathbb{C}$, **d'écrire** -1 comme un carré.

Exemple 2. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ peut se traduire par

- Le carré de **n'importe quel** réel est positif ou nul.
- Le carré d'un réel est **toujours** positif ou nul.
- Dans $\mathbb{R}$, **on ne peut pas trouver** de carré strictement négatif.

Règle n° 6

Les écritures $\forall x^2$, $\exists f(x)$ ou $\exists 2 \in \mathbb{N}$ sont incorrectes. On quantifie une lettre libre, pas une expression.

De plus, l'écriture $\nexists x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est incorrecte : il faut écrire

$$\neg(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)),$$

qui est d'ailleurs logiquement équivalent à $\forall x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$.

Exception pour les n -uplets : « $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ » est toléré et largement utilisé. En effet, l'écriture théoriquement correcte de

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 0$$

est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0.$$

Exemple.

❌ ~~$\forall x^2 \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}$.~~

✓ Tous les carrés de réels sont positifs ou nuls.

✓ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

❌ ~~$\exists f(x), f(x) \geq 0$.~~

✓ Certaines valeurs de la fonction f sont positives.

✓ $\exists x \in D_f, f(x) \geq 0$.

❌ ~~$\exists 2 \in \mathbb{Z}$.~~

✓ Le nombre 2 est un entier.

✓ $2 \in \mathbb{Z}$.

✓ $\exists n \in \mathbb{Z}, n = 2$ (mais c'est très maladroit).

❌ ~~$\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.~~

✓ Il n'existe pas de rationnel dont le carré vaut 2.

✓ $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$.

Règle n° 7

Si l'on veut démontrer une assertion mathématique qui commence par « $\forall x \in E$ », la démonstration doit **obligatoirement** commencer par « Soit x dans E » (ou « Soit $x \in E$ »).

Exemples. Montrer que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*}, \exists a \in \mathbb{C}, z = a^2.$$

$\boxed{\text{Soit } z \text{ dans } \mathbb{C}^*}$. L'écriture exponentielle des nombres complexes nous permet de considérer r dans $\mathbb{R}_+^*$ et ϑ dans $\mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\vartheta}$. Si l'on pose² $a = \sqrt{r}e^{i\frac{\vartheta}{2}}$, on peut écrire, en vertu de la formule de Moivre (licite car $2 \in \mathbb{Z}$),

$$a^2 = (\sqrt{r})^2 (e^{i\frac{\vartheta}{2}})^2 = re^{2i\frac{\vartheta}{2}} = re^{i\vartheta} = z.$$

Ainsi, on a bien montré l'existence d'un complexe a tel que $z = a^2$.

Rappel 1. La locution « soit » ne signifie pas « pour tout » : cf. fiche n° 1.

Rappel 2. Après « Soit z dans $\mathbb{C}^*$ », on doit mettre un point. La syntaxe « Soit z dans $\mathbb{C}^*$, l'écriture exponentielle des nombres [...] » est incorrecte : c'est une *rupture syntaxique* (ou *anacoluthie*).

** PIÈGE !**

La formule de Moivre $(e^{i\vartheta})^n = e^{ni\vartheta}$ n'a de sens (et n'est vraie) pour tout réel ϑ que lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

Si vous en doutez, tentez avec $\vartheta = 2\pi$ et $n = \frac{1}{4}$: que se passe-t-il alors ?

2. J'emploie le verbe *poser* parce que j'introduis un nouvel objet — à savoir $\sqrt{r}e^{i\frac{\vartheta}{2}}$ — et le nomme par une lettre jamais encore utilisée (cette opération est donc une affectation).

Exercices

Exercice 1 Corriger les phrases suivantes.

1. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$.
2. On sait que dans $\mathbb{C}$, $\exists z$ tel que $z^2 = -1$. Par exemple, $z = -i$.
3. La fonction f est paire quand $f(-x) = f(x)$.
4. La fonction f est paire quand $f(-x) = f(x) \forall x \in D_f$.

Exercice 2 (*Version*). Traduire dans un français correct, si possible élégant, sans utiliser le mot-à-mot, sans prononcer les variables muettes. La lettre E désigne ici un ensemble et $\mathcal{P}$ un prédicat sur E : pour tout élément x de E , $\mathcal{P}(x)$ est une assertion.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leq n$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, [(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| \leq \varepsilon) \implies x = 0]$.
3. $\exists z \in \mathbb{C}, z^3 = 1 + i$.
4. $[\exists x \in E, \mathcal{P}(x)] \wedge [\forall y \in E, \forall z \in E, (\mathcal{P}(y) \wedge \mathcal{P}(z) \implies y = z)]$.
5. $(\forall x)(\forall y)(x = y \iff [(\forall a) (a \in x \iff a \in y)])$ (c'est le premier axiome de la théorie des ensembles).

Exercice 3 (*Thème*). Traduire à l'aide d'assertions quantifiées. On demande de ne pas employer le symbole $\neg$ (négation).

1. La fonction $\exp$ n'est pas paire
2. Aucun rationnel n'a un carré valant 2.
3. Le cosinus d'un réel ne peut jamais valoir 3.
4. Le cosinus d'un réel peut parfois valoir $\frac{1}{10}$.
5. On peut trouver des nombres complexes dont l'exponentielle vaut -1 .
6. Il n'y pas qu'un seul nombre complexe dont l'exponentielle vaut -1 .
7. Le nombre 12 est un multiple du nombre 4.
8. Le nombre 12 n'est pas un multiple du nombre 5.
9. Le nombre 5 est un nombre premier.
10. Étant donné³ une droite du plan affine, et un point extérieur à cette droite, il existe une unique droite passant par ce point, ne rencontrant pas la première droite.

Pour la dernière phrase, on notera $\mathcal{P}$ le plan affine, et Δ l'ensemble des droites de $\mathcal{P}$.

Exercice 4 (*Version*). On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des êtres humains. On définit le prédicat

$$\mathcal{P}(x, y) : \text{« } x \text{ est le père de } y \text{ »}.$$

Traduire en français courant les assertions suivantes, sans faire de mot-à-mot et sans prononcer les lettres muettes.

1. « $\forall x \in \mathbb{H}, \exists y \in \mathbb{H}, \mathcal{P}(y, x)$ ». Cette assertion est-elle vraie ?
2. « $\exists y \in \mathbb{H}, \forall x \in \mathbb{H}, \mathcal{P}(y, x)$ ». Cette assertion est-elle vraie ?

Même question avec les assertions suivantes, où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des prisons, $\mathbb{G}$ l'ensemble des gardiens de prison, $\mathbb{C}$ l'ensemble des cellules, où $\mathcal{T}(g, p)$: « g travaille dans p » et $\mathcal{O}(g, c)$: « g peut ouvrir c ».

3. « $\forall p \in \mathbb{P}, \exists g \in \mathbb{G}, \forall c \in \mathbb{C}, (\mathcal{T}(g, p) \wedge \mathcal{O}(g, c))$ ».
4. « $\exists p \in \mathbb{P}, \forall g \in \mathbb{G}, \forall c \in \mathbb{C}, (\mathcal{T}(g, p) \wedge \mathcal{O}(g, c))$ ».

3. Rappel : « étant donné une droite », mais « une droite étant donnée ».

Exercice 5 (*Thème*). On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des êtres humains. L'ensemble des êtres humains mâles sera noté $\mathbb{G}$ et l'ensemble des êtres humains femelles sera noté $\mathbb{F}$. Nous ferons l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbb{F} \cup \mathbb{G} = \mathbb{H}.$$

Soit x et y dans $\mathbb{H}$.

— Pour dire que « x aime y » nous écrirons $x \heartsuit y$.

— Pour dire que « x est plus jeune que y » nous écrirons $x \prec y$.

Bien que le verbe aimer soit hautement polysémique⁴ nous admettrons que l'on définit ainsi deux relations binaires $\heartsuit$ et $\prec$ sur l'ensemble $\mathbb{H}$. On notera $x \not\heartsuit y$ plutôt que $\neg(x \heartsuit y)$.

On demande de formaliser les phrases suivantes en langage formalisé. On ne se préoccupera pas de leur valeur de vérité. On rappelle que les symboles $\nexists$ ou $\Rightarrow$ ne sont pas autorisés dans un langage formalisé correct.

1. Tout le monde aime tout le monde.
2. Personne n'aime personne.
3. Tout le monde aime quelqu'un.
4. Chaque fois que deux hommes aiment une même femme, ces deux hommes ne s'aiment pas.
5. Certains hommes sont gays. *Indication : utiliser une implication.*
6. L'amitié n'est pas toujours un sentiment réciproque.
7. Il arrive qu'une amitié soit payée de retour.
8. Les amis de mes amis sont mes amis (règle générale).
9. Le plus âgé des êtres humains est un homme et il aime toutes les femmes qui ont plus de 50 ans.
10. Le plus âgé des êtres humains est un homme et il aime uniquement toutes les femmes qui ont plus de 50 ans.

4. Car aimer sa copine, aimer sa mère et aimer le chocolat n'ont à peu près aucun rapport entre eux. Il y a au moins quatre façons de l'exprimer en grec : φιλέω, αγαπάω, στέργω, ἐράω (cherchez-en le sens), et au moins **dix** en arabe littéraire !