

# ERRATUM

## Toutes les maths en MP/MPI

Et un peu plus en MP\*/MPI\*

Vincent Rohart

Mise à jour 19 septembre 2025

Page 9

**Preuve du théorème 2, 1<sup>er</sup> § – vue par L. Koltès.**

**Au lieu de lire** ce qui montre que  $g \uparrow h^{-1} \in G'$ .

**lire plutôt** ce qui montre que  $g \uparrow h^{-1} \in f\langle G' \rangle$ .

Page 16

**Définition 2 : indicatrice d'Euler  $\varphi(n)$  – vue par G. Deslandes.**

**Au lieu de lire** on note  $\varphi(n)$  le nombre d'entiers  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  premiers avec  $n$ .

**lire plutôt** on note  $\varphi(n)$  le nombre d'entiers  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  premiers avec  $n$ .

Page 47

**Théorème (noyau d'un morphisme d'algèbres).**

Il n'y a pas d'erreur, mais le programme officiel impose de considérer des idéaux d'anneaux **commutatifs**. Or ici, l'algèbre  $A$  n'est pas forcément commutative. Voir cependant la remarque (\*) (hors programme) page 25 : le noyau d'un morphisme d'algèbres  $f : A \rightarrow B$  est un idéal *bilatère* de l'anneau  $A$ .

Page 55

**Exercice 15 (anneaux noëthériens).**

**Au lieu de lire** un idéal  $I$  est dit *de type fini* quand il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in A$  tels que tout  $x \in I$  puisse s'écrire

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ .

**lire plutôt** un idéal  $I$  est dit *de type fini* quand il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in A$  tels que tout  $x \in I$  puisse s'écrire

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$ .

Bien sûr, il faut écrire  $\text{Vect}_A$  et non  $\text{Vect}_{\mathbb{Z}}$ .

Page 70

**Preuve du théorème 5.**

**Au lieu de lire**  $E$  et  $F$ .

**lire plutôt**  $E_1$  et  $E_2$ .

Page 72

**2<sup>e</sup> • (remarques culturelles) – vue par M. Taalbi Garnier de Labareyre.**

Au lieu de lire mais on ne peut extraire en extraire une base.

lire plutôt mais on ne peut en extraire une base.

Page 164

**Preuve du théorème 3, avant dernière ligne.**

Au lieu de lire [...] donc après passage à la limite,  $\|\ell - \ell'\| > \varepsilon$ .

lire plutôt [...] donc après passage à la limite,  $\|\ell - \ell'\| \geq \varepsilon$ .

Page 181

**Définition 2.**

Il manque (évidemment) un «  $\forall \varepsilon > 0$  » :

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \left[ \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon \right]$$

Page 181

**Piège qui suit la définition 2 – vue par G. Deslandes.**

Je me suis pris les pieds dans le tapis ! L'exemple de  $1_{\mathbb{R}_+}$  (qui est continue sur  $\mathbb{R}_+$  mais pas en 0) permet de comprendre que ma première phrase est fausse.

Au lieu de lire Avec cette définition, si  $f$  est continue sur  $A$ , alors  $f$  est continue en chaque point de  $A$ .

lire plutôt Avec cette définition, si  $f$  est continue en chaque point de  $A$ , alors  $f$  est continue sur  $A$ .

En effet, dire que  $f$  est continue en tout point de  $A$  signifie

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \boxed{\forall x \in E}, \left[ \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon \right],$$

ce qui entraîne évidemment (puisque  $A \subset E$ ) l'assertion

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \boxed{\forall x \in A}, \left[ \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon \right].$$

Page 203

**Exemples 1 et 2.**

J'ai laissé des transposées à l'ancienne mode :  ${}^t\mathbf{M}$  au lieu de la nouvelle notation  $\mathbf{M}^\top$ .

Page 212

**Preuve du théorème 2.**

Précision à la fin du 1<sup>er</sup> § : si  $y_1$  et  $y_2$  sont dans  $C(a)$ , il est alors évident qu'ils sont reliés, puisqu'ils sont reliés tous les deux à  $a$ .

Page 271

**Preuve du théorème – Vue par H. Ahamada.**

**1  $\implies$  2** Remplacer les  $\text{Sp}_K(\mathbf{M})$  par des  $\text{Sp}_K(u)$ .

**4  $\implies$  1** Remplacer  $\bigoplus_{k=1}^d \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  par  $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_K(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ .

## Page 330

**Deuxième piège.**

*Mea culpa*, il y a bien un résultat au programme qui permet d'affirmer cela : c'est sa démonstration qui est hors programme.

**Théorème d'Abel radial.** Si  $\sum a_n x_n$  est une série entière réelle de rayon non nul  $R$ , et si la série numérique  $\sum a_n R^n$  converge, alors  $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ .

Ainsi, il est complètement autorisé, dans le cadre du programme, de dire :

- la série entière  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$  est de rayon 1 et sa somme est  $x \mapsto \ln(1+x)$  sur  $] -1, 1[$ .
- la série numérique  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge par le critère spécial des séries alternées,

**DONC**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$  en vertu du théorème d'Abel radial.

Attention cependant, pour les séries entières complexes, c'est un peu plus compliqué.

## Page 386

**Vue par G. Deslandes.**

Je propose deux exercices qui montrent que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , mais je n'ai pas indiqué dans quel chapitre : l'exercice 23 est au chapitre en cours (le 11) mais l'exercice 12 au chapitre suivant (le 12).

## Page 391

**Vue par G. Deslandes.**

Je propose deux exercices qui montrent que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ , mais je n'ai pas indiqué dans quel chapitre : l'exercice 22 est au chapitre en cours (le 11) mais l'exercice 15 au chapitre suivant (le 12).

## Page 429

**Rappel – vue par G. Deslandes.**

**Au lieu de lire**  $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 10^{-n}$

**lire plutôt**  $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ .

## Page 442

**Théorème 4 – vue par G. Deslandes.**

**Au lieu de lire** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de complexes

**lire plutôt** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de complexes.

Page 447

**Théorème – vue par G. Deslandes.**

Il manque des mots avant la conclusion.

**Au lieu de lire** Alors pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , la famille  $(u_i)_{i \in I_\lambda}$  est sommable. **La famille** **$\left( \sum_{i \in I_\lambda} u_i \right)_{\lambda \in \Lambda}$**  et**lire plutôt** Alors pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , la famille  $(u_i)_{i \in I_\lambda}$  est sommable, **la famille** **$\left( \sum_{i \in I_\lambda} u_i \right)_{\lambda \in \Lambda}$**  est sommable et

Page 450

**La sommation d'Abel.****Au lieu de lire** Une suite de complexes  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite sommable au sens d'Abel [...]**lire plutôt** Une suite de complexes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite sommable au sens d'Abel [...]

Page 454

**Exercice 12, 3<sup>e</sup> ligne.****Au lieu de lire**  $\zeta(s) - 1 \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$ **lire plutôt**  $\zeta(s) - 1 \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^s}$ 

Page 525

**Preuve du théorème 2, 3<sup>e</sup> point – vue par A. Thai.****Au lieu de lire** Cela prouve que  $u \in (F \cap G)^\top$ **lire plutôt** Cela prouve que  $x \in (F \cap G)^\top$ 

Page 527

**Lignes 9 et 10 – orthographe.****Au lieu de lire** Leur direction le sont.**lire plutôt** Leurs directions le sont.

Page 531

**Preuve du théorème 1, avant dernière ligne – vue par G. Deslandes.****Au lieu de lire** Cette forme linéaire est identiquement nulle si  $a \neq 0_E$  (facile).**lire plutôt** Cette forme linéaire est identiquement nulle si  $a = 0_E$  (facile).

Page 549

**Exemple de base – vue par M. Ojeda.****Au lieu de lire**  $\|t_a(x) - t_a(y)\| = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - a\|$ .**lire plutôt**  $\|t_a(x) - t_a(y)\| = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\|$ .

Page 593

**Preuve du théorème 3, lignes 6 et 7 – vue par M. Ojeda.****Au lieu de lire**  $dg(a)$ .**lire plutôt**  $dg(f(a))$ .

Page 604

**Preuve du théorème de Schwarz, version 1, dernière ligne.**

Bafouille sans grande importance car évidente.

**Au lieu de lire** Cela traduit le fait que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_2 f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = \partial_2 f(a)$ , et donc que  $\partial_{1,2} f(a)$  existe et vaut  $\partial_{2,1} f(a)$ .

**lire plutôt** Cela traduit le fait que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_2 f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = \partial_{2,1} f(a)$ , et donc que  $\partial_{1,2} f(a)$  existe et vaut  $\partial_{2,1} f(a)$ .

Page 607

**Exemple, 5<sup>e</sup> avant la fin – vue par M. Ojeda.**

**Au lieu de lire** soit encore [...]  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{\partial f^*}{\partial v}$ ,

**lire plutôt** soit encore [...]  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f^*}{\partial v}$ ,

Page 660

**Corrigé de l'exercice 15, suite logique de l'erratum p. 55.**

**Au lieu de lire**  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{Vect}_{\mathbb{Z}}(a_1, \dots, a_n)$

**lire plutôt**  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{A}$ ,  $\text{Vect}_{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)$ .

Page 669

**Corrigé de l'exercice 1, 1<sup>re</sup> colonne, 6 lignes avant la fin.**

**Au lieu de lire** Cela n'est possible que si  $k = p$ ,

**lire plutôt** Cela n'est possible que si  $k = p + 1$ ,

Page 669

**Corrigé de l'exercice 3, 4<sup>e</sup> ligne – Vue par M. Hernandez-Motte.**

**Au lieu de lire**  $x$  dans  $F_i \cap (F_1 \cap \dots \cap F_{i-1})$ ,

**lire plutôt**  $x$  dans  $F_i \cap (F_1 + \dots + F_{i-1})$ ,

Page 670

**Corrigé de l'exercice 4, q. 3, 1<sup>er</sup> §, dernière phrase – Vue par W. Viriot.**

**Au lieu de lire** L'endomorphisme induit  $u_F$  est nilpotent **est** son indice  $d$  [...]

**lire plutôt** L'endomorphisme induit  $u_F$  est nilpotent **et** son indice  $d$  [...]

Page 672

**Corrigé de l'exercice 11, q. 1, avant dernière ligne – Vue par T. Minois.**

**Au lieu de lire** avec  $z = f(x)$ , ce qui montre [...]

**lire plutôt** avec  $z = f(y)$ , ce qui montre [...]

Page 673

**Corrigé de l'exercice 23, q. 3, 2<sup>e</sup> ligne – Vue par R. Imbert.**

**Au lieu de lire** avec  $L_{A^T}(X^T)$ .

**lire plutôt** avec  $(L_{A^T}(X^T))^T$ .

Page 674

**Corrigé de l'exercice 15, q. 2 – Vue par M. Taalbi Garnier de Labareyre.**

**Au lieu de lire** Le cours nous explique que  $(PQ)(A) = P(A)Q(B)$

**lire plutôt** Le cours nous explique que  $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$

Page 685

Corrigé de l'exercice 16, q. 1, deux dernières lignes – Vue par W. Viriot.

Au lieu de lire  $-\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})U_k,$

lire plutôt  $-\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)U_k.$

Page 687

Corrigé de l'exercice 21, 2<sup>e</sup> ligne de code Python.

Enlever l'accolade fermante } à la fin de la ligne.

Page 702

Corrigé de l'exercice 8, q. 1, avant dernière ligne – Vue par M. Roland-Billecart.

Au lieu de lire  $f^{-1}\langle\{0\}\rangle = \mathcal{M}_{n,p}^{(r)}(\mathbb{K})$

lire plutôt  $f^{-1}\langle\{0\}\rangle = \bigcup_{k=0}^r \mathcal{M}_{n,p}^{(k)}(\mathbb{K})$

Page 732

Corrigé de l'exercice 15, 3 lignes avant la fin – Vue par W. Viriot.

Au lieu de lire  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{x^2+k^2} \geq n \times \frac{x}{x^2+(2n)^n}.$

lire plutôt  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{x^2+k^2} \geq n \times \frac{x}{x^2+(2n)^2}.$

Page 753

Corrigé de l'exercice 13, q. 1, 5<sup>e</sup> ligne.

Au lieu de lire En écrivant que  $(\Gamma')^2(x)$  vaut [...]

lire plutôt En écrivant que  $\Gamma'(x)$  vaut [...]

Page 753

Corrigé de l'exercice 13, q. 2, 2<sup>e</sup> colonne, ligne 9.

Au lieu de lire en retranchant  $x \ln(x) = \ln(n^x)$  [...]

lire plutôt en retranchant  $x \ln(n) = \ln(n^x)$  [...]

Page 754

Corrigé de l'exercice 3, 1<sup>re</sup> intégrale – Vue par M. Corentin Ottavi

Au lieu de lire [...] et comme le crochet est nul :

$$\int_0^{+\infty} \ln \left[ 1 + \frac{1}{x^2} \right] dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3} dx$$

lire plutôt [...] et comme le crochet est nul :

$$\int_0^{+\infty} \ln \left[ 1 + \frac{1}{x^2} \right] dx = - \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3} dx$$

Page 785

**Corrigé de l'exercice 15, q. 5.**

La série  $\sum u_n e_n$  n'est pas absolument convergente en général :  $u$  n'est pas forcément dans  $\ell^1$ . Mais elle converge, et l'explication est plus subtile.

En effet, si l'on note  $S_n$  la somme partielle  $\sum_{k=0}^n u_k e_k$ , alors pour tout entier  $p < n$ , le théorème de Pythagore donne

$$\|S_n - S_p\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^n u_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^n |u_k|^2 \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |u_k|^2,$$

quantité qui tend vers 0 quand  $p \rightarrow \infty$ . Les suites de Cauchy sont hors programme (cf. cependant p. 298 sur le lemme qui précède le théorème de la double limite), mais on peut construire facilement par récurrence une suite d'entiers  $p_0 < p_1 < \dots$  telle que pour tout entier  $k$ ,  $\|S_n - S_p\| \leq 2^{-k}$  dès que  $n > p > p_k$ . Ainsi, la série  $\sum (S_{p_{k+1}} - S_{p_k})$  est ACV, donc converge par hypothèse faite sur E. La suite  $(S_n)$  possède donc une valeur d'adhérence  $x$  : on montre classiquement que  $S_n \rightarrow x$  en écrivant  $\|S_n - x\| \leq \|S_n - S_{p_n}\| + \|S_{p_n} - x\|$ . Par construction,  $\Phi(x) = u$ , ce qui prouve la surjectivité de  $\Phi$ .

785-786

**Corrigé de l'exercice 17, q. 2, 3, 4.**

Remplacer tous les  $x_1, \dots, x_{\textcolor{red}{n}}$  par des  $x_1, \dots, x_{\textcolor{blue}{p}}$

Page 792

**Corrigé de l'exercice 19, q. 2, colonne 2, ligne 4.**

**Au lieu de lire**  $\Phi(g) - \Phi(1)$

**lire plutôt**  $\Phi(g) - \Phi(g)(1)$