ERRATUM

Toutes les maths en MP/MPI

Et un peu plus en MP*/MPI*

Vincent Rohart

Mise à jour 20 février 2025

Page 9

Preuve du théorème 2, 1^er^ § – vue par L. Koltès.
Au lieu de lire ce qui montre que $g \top h^{-1} \in \mathrm{G}'$.
lire plutôt ce qui montre que $g \top h^{-1} \in f\langle \mathrm{G}' \rangle$.

Page 16

Définition 2 : indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ – vue par G. Deslandes.
Au lieu de lire on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $k \in [\![0, n-1]\!]$ premiers avec n.
lire plutôt on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers k dans $[\![1, n]\!]$ premiers avec n.

Page 47

Théorème (noyau d'un morphisme d'algèbres).
Il n'y a pas d'erreur, mais le programme officiel impose de considérer des idéaux d'anneaux **commutatifs**. Or ici, l'algèbre A n'est pas forcément commutative. Voir cependant la remarque $(*)$ (hors programme) page 25 : le noyau d'un morphisme d'algèbres $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un idéal *bilatère* de l'anneau A.

Page 55

Exercice 15 (anneaux nœthériens).
Au lieu de lire un idéal I est dit *de type fini* quand il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ tels que tout $x \in \mathrm{I}$ puisse s'écrire

$$x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$.
lire plutôt un idéal I est dit *de type fini* quand il existe $n \in \mathrm{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ tels que tout $x \in \mathrm{I}$ puisse s'écrire

$$x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{A}$.

Bien sûr, il faut écrire $\mathrm{Vect}_{\mathrm{A}}$ et non $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}$.

Page 70

Preuve du théorème 5.
Au lieu de lire E et F.
lire plutôt E_1 et E_2.

Page 72

2e • (remarques culturelles) – vue par M. Taalbi Garnier de Labareyre.
Au lieu de lire mais on ne peut extraire en extraire une base.
lire plutôt mais on ne peut en extraire une base.

Page 164

Preuve du théorème 3, avant dernière ligne.
Au lieu de lire [...] donc après passage à la limite, $\|\ell - \ell'\| > \varepsilon$.
lire plutôt [...] donc après passage à la limite, $\|\ell - \ell'\| \geqslant \varepsilon$.

Page 181

Définition 2.
Il manque (évidemment) un « $\forall \varepsilon > 0$ » :

$$\forall a \in \mathrm{A},\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \ \forall x \in \mathrm{A},\ \Big[\|x - a\|_{\mathrm{E}} \leqslant \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon\Big]$$

Page 181

Piège qui suit la définition 2 – vue par G. Deslandes.
Je me suis pris les pieds dans le tapis ! L'exemple de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ (qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas en 0) permet de comprendre que ma première phrase est fausse.

Au lieu de lire Avec cette définition, si f est continue sur A, alors f est continue en chaque point de A.

lire plutôt Avec cette définition, si f est continue en chaque point de A, alors f est continue sur A.

En effet, dire que f est continue en tout point de A signifie

$$\forall a \in \mathrm{A},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \boxed{\forall x \in \mathrm{E}},\ \Big[\|x - a\|_{\mathrm{E}} \leqslant \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon\Big],$$

ce qui entraîne évidemment (puisque $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$) l'assertion

$$\forall a \in \mathrm{A},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \boxed{\forall x \in \mathrm{A}},\ \Big[\|x - a\|_{\mathrm{E}} \leqslant \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon\Big].$$

Page 203

Exemples 1 et 2.
J'ai laissé des transposées à l'ancienne mode : ${}^{t}\mathrm{M}$ au lieu de la nouvelle notation $\mathrm{M}^{\intercal}$.

Page 212

Preuve du théorème 2.
Précision à la fin du 1er § : si y_1 et y_2 sont dans $\mathrm{C}(a)$, il est alors évident qu'ils sont reliés, puisqu'ils sont reliés tous les deux à a.

Page 271

Preuve du théorème – Vue par H. Ahamada.
$\boxed{1 \implies 2}$ Remplacer les $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\mathrm{M})$ par des $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.

$\boxed{4 \implies 1}$ Remplacer $\bigoplus_{k=1}^{d} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ par $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

Page 330

Deuxième piège.
Mea culpa, il y a bien un résultat au programme qui permet d'affirmer cela : c'est sa démonstration qui est hors programme.

Théorème d'Abel radial. Si $\sum a_n x_n$ est une série entière réelle de rayon non nul R, et si la série numérique $\sum a_n \mathrm{R}^n$ converge, alors $\lim\limits_{x\to\mathrm{R}^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{R}^n$.

Ainsi, il est complètement autorisé, dans le cadre du programme, de dire :
- la série entière $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ est de rayon 1 et sa somme est $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1, 1[$.
- la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées,

DONC $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$ en vertu du théorème d'Abel radial.

Attention cependant, pour les séries entières complexes, c'est un peu plus compliqué.

Page 386

Vue par G. Deslandes.
Je propose deux exercices qui montrent que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, mais je n'ai pas indiqué dans quel chapitre : l'exercice 23 est au chapitre en cours (le 11) mais l'exercice 12 au chapitre suivant (le 12).

Page 391

Vue par G. Deslandes.
Je propose deux exercices qui montrent que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, mais je n'ai pas indiqué dans quel chapitre : l'exercice 22 est au chapitre en cours (le 11) mais l'exercice 15 au chapitre suivant (le 12).

Page 429

Rappel – vue par G. Deslandes.
Au lieu de lire $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 10^{-n}$

lire plutôt $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

Page 442

Théorème 4 – vue par G. Deslandes.
Au lieu de lire Soit $(u_n)_{n\in}$ une suite de complexes
lire plutôt Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.

Page 447

Théorème – vue par G. Deslandes.
Il manque des mots avant la conclusion.
Au lieu de lire Alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable. La famille $\left(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\right)_{\lambda\in\Lambda}$ et
lire plutôt Alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable, la famille $\left(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\right)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable et

Page 450

La sommation d'Abel.
Au lieu de lire Une suite de complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite sommable au sens d'Abel [...]
lire plutôt Une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite sommable au sens d'Abel [...]

Page 454

Exercice 12, 3e ligne.
Au lieu de lire $\zeta(s) - 1 \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$
lire plutôt $\zeta(s) - 1 \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^s}$

Page 525

Preuve du théorème 2, 3e point – vue par A. Thai.
Au lieu de lire Cela prouve que $u \in (F \cap G)^\intercal$
lire plutôt Cela prouve que $x \in (F \cap G)^\intercal$

Page 527

Lignes 9 et 10 – orthographe.
Au lieu de lire Leur direction le sont.
lire plutôt Leurs directions le sont.

Page 531

Preuve du théorème 1, avant dernière ligne – vue par G. Deslandes.
Au lieu de lire Cette forme linéaire est identiquement nulle si $a \neq 0_E$ (facile).
lire plutôt Cette forme linéaire est identiquement nulle si $a = 0_E$ (facile).

Page 549

Exemple de base – vue par M. Ojeda.
Au lieu de lire $\|t_a(x) - t_a(y)\| = \|(x+a) - (y+a)\| = \|x - a\|$.
lire plutôt $\|t_a(x) - t_a(y)\| = \|(x+a) - (y+a)\| = \|x - y\|$.

Page 593

Preuve du théorème 3, lignes 6 et 7 – vue par M. Ojeda.
Au lieu de lire $\mathrm{d}g(a)$.
lire plutôt $\mathrm{d}g(f(a))$.

Page 604

Preuve du théorème de Schwarz, version 1, dernière ligne.
Bafouille sans grande importance car évidente.
Au lieu de lire Cela traduit le fait que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\partial_2 f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)}{h} = \partial_2 f(a)$, et donc que $\partial_{1,2} f(a)$ existe et vaut $\partial_{2,1} f(a)$.
lire plutôt Cela traduit le fait que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\partial_2 f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)}{h} = \partial_{2,1} f(a)$, et donc que $\partial_{1,2} f(a)$ existe et vaut $\partial_{2,1} f(a)$.

Page 607

Exemple, 5[e] avant la fin – vue par M. Ojeda.
Au lieu de lire soit encore [...] $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{\partial f^*}{\partial v}$,
lire plutôt soit encore [...] $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f^*}{\partial v}$,

Page 660

Corrigé de l'exercice 15, suite logique de l'erratum p. 55.
Au lieu de lire $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(a_1, \dots, a_n)$
lire plutôt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathrm{A}$, $\mathrm{Vect}_{\mathrm{A}}(a_1, \dots, a_n)$.

Page 669

Corrigé de l'exercice 1, 1[re] colonne, 6 lignes avant la fin.
Au lieu de lire Cela n'est possible que si $k = p$,
lire plutôt Cela n'est possible que si $k = p + 1$,

Page 669

Corrigé de l'exercice 3, 4[e] ligne – Vue par M. Hernandez-Motte.
Au lieu de lire x dans $\mathrm{F}_i \cap (\mathrm{F}_1 \cap \dots \cap \mathrm{F}_{i-1})$,
lire plutôt x dans $\mathrm{F}_i \cap (\mathrm{F}_1 + \dots + \mathrm{F}_{i-1})$,

Page 670

Corrigé de l'exercice 4, q. 3, 1[er] §, dernière phrase – Vue par W. Viriot.
Au lieu de lire L'endomorphisme induit u_{F} est nilpotent est son indice d [...]
lire plutôt L'endomorphisme induit u_{F} est nilpotent et son indice d [...]

Page 672

Corrigé de l'exercice 11, q. 1, avant dernière ligne – Vue par T. Minois.
Au lieu de lire avec $z = f(x)$, ce qui montre [...]
lire plutôt avec $z = f(y)$, ce qui montre [...]

Page 673

Corrigé de l'exercice 23, q. 3, 2[e] ligne – Vue par R. Imbert.
Au lieu de lire avec $\mathrm{L}_{\mathrm{A}^\top}(\mathrm{X}^\top)$.
lire plutôt avec $(\mathrm{L}_{\mathrm{A}^\top}(\mathrm{X}^\top))^\top$.

Page 674

Corrigé de l'exercice 15, q. 2 – Vue par M. Taalbi Garnier de Labareyre.
Au lieu de lire Le cours nous explique que $(\mathrm{PQ})(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{B})$
lire plutôt Le cours nous explique que $(\mathrm{PQ})(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A})$

Page 685

Corrigé de l'exercice 16, q. 1, deux dernières lignes – Vue par W. Viriot.

Au lieu de lire $-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\mathrm{U}_k$,

lire plutôt $-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\mathrm{U}_k$.

Page 687

Corrigé de l'exercice 21, 2e ligne de code `Python`.

Enlever l'accolade fermante `}` à la fin de la ligne.

Page 702

Corrigé de l'exercice 8, q. 1, avant dernière ligne – Vue par M. Roland-Billecart.

Au lieu de lire $f^{-1}\langle\{0\}\rangle = \mathscr{M}_{n,p}^{(r)}(\mathbb{K})$

lire plutôt $f^{-1}\langle\{0\}\rangle = \bigcup_{k=0}^{r} \mathscr{M}_{n,p}^{(k)}(\mathbb{K})$

Page 732

Corrigé de l'exercice 15, 3 lignes avant la fin – Vue par W. Viriot.

Au lieu de lire $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{x^2+k^2} \geqslant n \times \frac{x}{x^2+(2n)^n}$.

lire plutôt $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{x^2+k^2} \geqslant n \times \frac{x}{x^2+(2n)^2}$.

Page 753

Corrigé de l'exercice 13, q. 1, 5e ligne.

Au lieu de lire En écrivant que $(\Gamma')^2(x)$ vaut [...]

lire plutôt En écrivant que $\Gamma'(x)$ vaut [...]

Page 753

Corrigé de l'exercice 13, q. 2, 2e colonne, ligne 9.

Au lieu de lire en retranchant $x\ln(x) = \ln(n^x)$ [...]

lire plutôt en retranchant $x\ln(n) = \ln(n^x)$ [...]

Page 785

Corrigé de l'exercice 15, q. 5.
La série $\sum u_n e_n$ n'est pas absolument convergente en général : u n'est pas forcément dans ℓ^1. Mais elle converge, et l'explication est plus subtile.

En effet, si l'on note S_n la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k e_k$, alors pour tout entier $p < n$, le théorème de Pythagore donne

$$\|S_n - S_p\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{n} u_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} |u_k|^2 \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} |u_k|^2,$$

quantité qui tend vers 0 quand $p \to \infty$. Les suites de Cauchy sont hors programme (cf. cependant p. 298 sur le lemme qui précède le théorème de la double limite), mais on peut construire facilement par récurrence une suite d'entiers $p_0 < p_1 < \dots$ telle que pour tout entier k, $\|S_n - S_p\| \leqslant 2^{-k}$ dès que $n > p > p_k$. Ainsi, la série $\sum (S_{p_{k+1}} - S_{p_k})$ est ACV, donc converge par hypothèse faite sur E. La suite (S_n) possède donc une valeur d'adhérence x : on montre classiquement que $S_n \to x$ en écrivant $\|S_n - x\| \leqslant \|S_n - S_{p_n}\| + \|S_{p_n} - x\|$. Par construction, $\Phi(x) = u$, ce qui prouve la surjectivité de Φ.

785-786

Corrigé de l'exercice 17, q. 2, 3, 4.
Remplacer tous les $x_1, \dots, x_n$ par des $x_1, \dots, x_p$

Page 792

Corrigé de l'exercice 19, q. 2, colonne 2, ligne 4.
Au lieu de lire $\Phi(g) - \Phi(1)$
lire plutôt $\Phi(g) - \Phi(g)(1)$