ERRATUM

Toutes les maths en MP/MPI

Et un peu plus en MP*/MPI*

Vincent Rohart

Mise à jour du 29 février 2024

Page 9 - Preuve du théorème 2, 1^er^ §, vue par L. Koltès
Au lieu de lire : ce qui montre que $g \top h^{-1} \in \mathrm{G}'$.
Lire plutôt : ce qui montre que $g \top h^{-1} \in f\langle \mathrm{G}' \rangle$.

Page 16 - Définition 2 : indicatrice d'Euler $\varphi(n)$, vue par G. Deslandes
Au lieu de lire : on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $k \in [\![0, n-1]\!]$ premiers avec n.

Lire plutôt : on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ premiers avec n.

Cela ne pose problème que pour $\varphi(1)$, qui vaut 1 (et non 0).

Page 47 - Théorème (noyau d'un morphisme d'algèbre).
Il n'y a pas d'erreur, mais le programme impose de considérer des idéaux d'anneaux **commutatifs**. Or ici, l'algèbre A n'est pas nécessairement commutative. Voir cependant la remarque $(*)$ (hors programme) page 25 : le noyau d'un morphisme d'algèbre est, évidemment, un idéal *bilatère* de l'anneau A.

Page 55 - exercice 15 (anneaux nœthérien).
Au lieu de lire : un idéal I est dit *de type fini* quand il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ tels que tout $x \in \mathrm{I}$ puisse s'écrire

$$x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$.

lire plutôt : un idéal I est dit *de type fini* quand il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ tels que tout $x \in \mathrm{I}$ puisse s'écrire

$$x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{A}$.

Bien sûr, il faut écrire $\mathrm{Vect}_{\mathrm{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ et non pas $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(a_1, \ldots, a_n)$.

Page 70 - preuve du théorème 5.
Au lieu de lire : E et F.

lire plutôt : E_1 et E_2.

Page 72 - deuxième • dans les remarques culturelles, vue par M. Taalbi Garnier de Labareyre
Au lieu de lire : mais on ne peut extraire en extraire une base.

lire plutôt : mais on ne peut en extraire une base.

Page 164 - preuve du théorème 3, avant-dernière ligne.
Au lieu de lire : [...] donc après passage à la limite, $\|\ell - \ell'\| > \varepsilon$.

Lire plutôt : [...] donc après passage à la limite, $\|\ell - \ell'\| \geqslant \varepsilon$.

Page 181 - définition 2.
Il manque, évidemment, un $\forall \varepsilon > 0$:

$$\forall a \in \mathrm{A},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \Big[\|x - a\|_{\mathrm{E}} \leqslant \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon\Big]$$

Page 181 - piège qui suit la définition 2, vu par G. Deslandes
Je me suis pris les pieds dans le tapis ! L'exemple (correct) de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ permet de comprendre que ma première phrase est fausse.

Au lieu de lire : Avec cette définition, si f est continue sur A alors f est continue en chaque point de A

Lire plutôt : Avec cette définition, si f est continue en chaque point de A alors f est continue sur A

En effet, dire que f est continue en tout point de A signifie :

$$\forall a \in \mathrm{A}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \boxed{\forall x \in \mathrm{E}},\ \Big[\|x - a\|_{\mathrm{E}} \leqslant \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon\Big]$$

ce qui entraîne évidemment (puisque $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$) l'assertion

$$\forall a \in \mathrm{A}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \boxed{\forall x \in \mathrm{A}},\ \Big[\|x - a\|_{\mathrm{E}} \leqslant \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon\Big].$$

Page 203 - Exemples 1 et 2
J'ai laissé des transposées à l'ancienne mode « ${}^{t}\mathrm{M}$ » au lieu de la nouvelle notation : $\mathrm{M}^{\intercal}$.

Page 212 - preuve du théorème 2.
Précision à la fin du 1^er^ paragraphe : si y_1 et y_2 sont dans $\mathrm{C}(a)$, il est alors évident qu'ils sont reliés, puisqu'ils sont reliés tous les deux à a.

Page 330 - preuve du théorème 2.
Mea culpa, il y a bien un résultat au programme qui permet d'affirmer cela : c'est sa démonstration qui est hors programme.

Théorème d'Abel radial. Si $\sum a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon non nul R, et si $\sum a_n \mathrm{R}^n$ converge, alors $\lim\limits_{x\to \mathrm{R}^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{R}^n$.

Ainsi, il est absolument autorisé dans le cadre du programme officiel de dire :
- La série entière $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ est de rayon 1 et sa somme est $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1,1[$,
- La série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées,

DONC $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$ en vertu du théorème d'Abel radial.

Page 386 - vue par G. Deslandes.
Je propose deux exercices qui montrent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, mais je n'ai pas indiqué dans quel chapitre : l'exercice 23 est au chapitre en cours (le 11) mais l'exercice 12 au chapitre suivant (le 12).

Page 391 - vue par G. Deslandes.
Je propose deux exercices qui montrent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, mais je n'ai pas indiqué dans quel chapitre : l'exercice 22 est au chapitre en cours (le 11) mais l'exercice 15 au chapitre suivant (le 12).

Page 429 - rappel - vue par G. Deslandes.
La somme commence évidemment à 0, puisque on parle d'une suite $(a)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Au lieu de lire : $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

lire plutôt : $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

Page 442 - théorème 4 - vue par G. Deslandes.

Au lieu de lire : Soit $(u_n)_{n\in}$ une suite de complexe.

lire plutôt : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexe.

Page 447 - théorème - vue par G. Deslandes.
Il manque des mots avant la conclusion.

Au lieu de lire : Alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la famille $(u_i)_{i\in \mathrm{I}_\lambda}$ est sommable. La famille $\left(\sum_{i\in \mathrm{I}_\lambda} u_i\right)_{\lambda\in\Lambda}$ et.

lire plutôt : Alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la famille $(u_i)_{i\in \mathrm{I}_\lambda}$ est sommable, la famille $\left(\sum_{i\in \mathrm{I}_\lambda} u_i\right)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable et :

Page 450 - La sommation d'Abel.
Au lieu de lire : une suite de complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite sommable au sens d'Abel (...)

lire plutôt : une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite sommable au sens d'Abel (...)

Page 454 - exercice 12, 3^e ligne.
Au lieu de lire : $\zeta(s) - 1 \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$

lire plutôt : $\zeta(s) - 1 \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^s}$

Page 525 - preuve du théorème 2, 3e point - vue par Amélie Thai.
Au lieu de lire : Cela prouve que $u \in (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp}$

lire plutôt : Cela prouve que $x \in (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp}$

Page 527 - lignes 9 et 10 (orthographe).
Au lieu de lire : leur direction le sont.

lire plutôt : leurs directions le sont.

Page 531 - preuve du théorème 1, avant dernière ligne - vue par G. Deslandes.
Au lieu de lire : Cette forme linéaire est identiquement nulle si et seulement si $a \neq 0_{\mathrm{E}}$ (facile).

lire plutôt : Cette forme linéaire est identiquement nulle si et seulement si $a = 0_{\mathrm{E}}$ (facile).

Page 604 - preuve du théorème de Schwarz version 1, dernière ligne.
Bafouille sans grande importance car évidente :

Au lieu de lire : cela traduit le fait que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\partial_2 f(a_1+h, a_2) - \partial_2 f(a)}{h} = \partial_2 f(a)$, et donc que $\partial_{1,2} f(a)$ existe et vaut $\partial_{2,1}(a)$.

lire plutôt : cela traduit le fait que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\partial_2 f(a_1+h, a_2) - \partial_2 f(a)}{h} = \partial_{2,1} f(a)$, et donc que $\partial_{1,2} f(a)$ existe et vaut $\partial_{2,1} f(a)$.

Page 660 - corrigé de l'exercice 15, suite logique à l'erratum p. 55
Au lieu de lire : $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(a_1, \dots, a_n)$.

lire plutôt : $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathrm{A}$, $\mathrm{Vect}_{\mathrm{A}}(a_1, \dots, a_n)$.

Page 660 - corrigé de l'exercice 15, suite logique à l'erratum p. 55
Au lieu de lire : $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(a_1, \dots, a_n)$.

lire plutôt : $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathrm{A}$, $\mathrm{Vect}_{\mathrm{A}}(a_1, \dots, a_n)$.

Page 669 - corrigé de l'exercice 1, 1re colonne, 6 lignes avant la fin.
Au lieu de lire : cela n'est possible que si $k = p$,

lire plutôt : cela n'est possible que si $k = p + 1$,

Page 669 - corrigé de l'exercice 3, 4e ligne, relevé par M. Hernandez-Motte
Au lieu de lire : x dans $\mathrm{F}_i \cap (\mathrm{F}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_{i-1})$,

lire plutôt : x dans $\mathrm{F}_i \cap (\mathrm{F}_1 + \ldots + \mathrm{F}_{i-1})$,

Page 670 - corrigé de l'exercice 4, question 3, 1er §, dernière phrase, relevée par M. Willy Viriot.
Au lieu de lire : L'endomorphisme induit u_F est nilpotent est son indice d est inférieur ou égal à $\dim \mathrm{F}$

lire plutôt : L'endomorphisme induit u_F est nilpotent et son indice d est inférieur ou égal à $\dim \mathrm{F}$

Page 672 - corrigé de l'exercice 11, question 1, avant-dernière ligne, relevée par M. Théo Minois.
Au lieu de lire : avec $z = f(x)$, ce qui montre

lire plutôt : avec $z = f(y)$, ce qui montre

Page 673 - corrigé de l'exercice 23, question 3, 2e ligne, relevée par M. Rémi Imbert.
Au lieu de lire : avec $\mathrm{L}_{\mathrm{A}^\intercal}(\mathrm{X}^\intercal)$.

lire plutôt : avec $(\mathrm{L}_{\mathrm{A}^\intercal}(\mathrm{X}^\intercal))^\intercal$.

Page 674 - corrigé de l'exercice 15, question 2, vue par M. Taalbi Garnier de Labareyre
Au lieu de lire : Le cours nous explique que $(\mathrm{PQ})(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{B})$

lire plutôt : Le cours nous explique que $(\mathrm{PQ})(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A})$

Page 685 - corrigé de l'exercice 16, question 1, deux dernières lignes

Au lieu de lire : $-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\mathrm{U}_k$,

lire plutôt : $-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\mathrm{U}_k$.

Page 687 - corrigé de l'exercice 21, 2$^{\text{re}}$ ligne du code `Python`

Enlever l'accolade fermante à la fin de la ligne.

Page 702 - corrigé de l'exercice 8, question 1, avant-dernière ligne.

Au lieu de lire : $f^{-1}\langle\{0\}\rangle = \mathscr{M}_{n,p}^{(r)}(\mathbb{K})$

lire plutôt : $f^{-1}\langle\{0\}\rangle = \bigcup_{k=0}^{r} \mathscr{M}_{n,p}^{(k)}(\mathbb{K})$

Page 732 - corrigé de l'exercice 15, 3 lignes avant la fin (colonne gauche), relevée par M. Willy Viriot.

Au lieu de lire : $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{x^2+k^2} \geqslant n \times \frac{x}{x^2+(2n)^n}$.

lire plutôt : $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{x^2+k^2} \geqslant n \times \frac{x}{x^2+(2n)^2}$

Page 753 - corrigé de l'exercice 13, question 1, 5$^{\text{e}}$ ligne 3.

Au lieu de lire : En écrivant que $(\Gamma')^2(x)$ vaut (...)

lire plutôt : En écrivant que $\Gamma'(x)$ vaut (...)

Page 753 - corrigé de l'exercice 13, question 2, 2$^{\text{e}}$ colonne, 9$^{\text{e}}$ ligne.

Au lieu de lire : en retranchant $x\ln(x) = \ln(n^x)$ (...)

lire plutôt : en retranchant $x\ln(n) = \ln(n^x)$ (...)

Page 785 - corrigé de l'exercice 15, question 5
La série $\sum u_n e_n$ **n'est pas** absolument convergente en général : u n'est pas forcément dans ℓ^1. Mais elle converge, et l'explication est plus subtile.

En effet, si on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k e_k$, alors pour tout $p < n$, le théorème de Pythagore,

$$\|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_p\|^2 = \| \sum_{k=p+1}^{n} u_k e_k\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} |u_k|^2 \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} |u_k|^2,$$

quantité qui tend vers 0 quand $p \to \infty$. Les suites de Cauchy sont hors programme (cf. cependant p. 298 sur le lemme qui précède le théorème de la double limite), mais on peut construire facilement par récurrence une suite $p_0 < p_1 < \dots$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_p\| \leqslant 2^{-k}$ dès que $n > p > p_k$. Ainsi, la série $\sum(\mathrm{S}_{p_{k+1}} - \mathrm{S}_{p_k})$ est ACV, donc CV par hypothèse faite sur E ! La suite (S_n) possède donc une valeur d'adhérence x : on montre classiquement que $\mathrm{S}_n \to x$ en écrivant $\|\mathrm{S}_n - x\| \leqslant \|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{p_n}\| + \|\mathrm{S}_{p_n} - x\|$. Par construction, $\Phi(x) = u$, ce qui prouve la surjectivité. Ce type de raisonnement a été vu dans des oraux de CentraleSupélec.

Pages 785-784 - corrigé de l'exercice 17, questions 2, 3, 4

Remplacer tous les $x_1, \dots, x_n$ par des $x_1, \dots, x_p$.

Page 792 - corrigé de l'exercice 19, question 2, 2e colonne, 4e ligne.
Au lieu de lire : $\Phi(g) - \Phi(1)$

lire plutôt : $\Phi(g) - \Phi(g)(1)$