



Devoir surveillé n° 1
Un corrigé possible

Année 2026/27

Formalisme mathématique (7 points)

1. Soit f une fonction, définie sur un intervalle non trivial I , à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire dans un français correct, si possible concis, sans mot-à-mot et sans écrire les lettres muettes les assertions proposées.

(a) $\forall t \in I, \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \delta \in \mathbb{R}_+, |h| \leq \delta \implies \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} - \ell \right| \leq \varepsilon.$

La fonction f est dérivable sur I .

(b) $\exists t \in I, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \delta \in \mathbb{R}_+, |h| \leq \delta \implies \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| \leq \varepsilon.$

La fonction f est dérivable en un certain point de I en lequel la dérivée de f est nulle.

2. Traduire en langage mathématique « on peut trouver des fonctions bijectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ ».

$$\exists f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \forall y \in \mathbb{R}^2, \exists ! x \in \mathbb{R}, y = f(x).$$

3. Traduire en langage mathématique « une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ ne peut jamais être linéaire ».

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \left[(\forall y \in \mathbb{R}^2, \exists ! x \in \mathbb{R}, y = f(x)) \implies f \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \right].$$

4. Il est bien connu que tout réel de $[0, 1[$ peut s'écrire $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ pour une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ qui ne stationne pas à 9.

- (a) Traduire en langage mathématique « la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne stationne pas à 9 ».

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_n \neq 9.$$

- (b) Si on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ qui ne stationnent pas à 9, de quelle bijection parle le fait bien connu ?

Il s'agit de l'application $f : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1[$ définie par

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{C}, f((a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}.$$

- (c) Quelle est la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ si le réel de $[0, 1[$ est le nombre $\frac{1}{3}$? Et si c'est le nombre $\frac{1}{4}$?

La suite associée à $\frac{1}{3} = 0,3333\cdots$ est la suite constante égale à 3. Celle associée à $\frac{1}{4} = 0,25$ est $(2, 5, 0, 0, 0, \cdots)$.

- (d) (Bonus : +1) : en considérant le réel $\frac{1}{2}$, montrer que si l'on enlève l'hypothèse « qui ne stationne pas à 9 », on perd l'unicité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Le réel $\frac{1}{2} = 0,5$ peut s'écrire $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot 10^{-n}$, mais aussi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ où $a_1 = 4$ et $a_n = 9$ pour tout $n \geq 2$. En effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n} = 4 \cdot 10^{-1} + 9 \sum_{n=2}^{\infty} 10^{-n} = \frac{4}{10} + 9 \frac{10^{-2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, les suites $(5, 0, 0, 0, \cdots)$ et $(4, 9, 9, 9, \cdots)$, bien que distinctes, auraient même image par f si l'ensemble de définition de f autorisait cette deuxième suite.

Exercice 1 — Nombres complexes (2 points)

Soit a et b deux réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$: le nombre complexe $a + bi$ n'est donc pas nul.

On note A le module de $a + bi$ et φ l'un de ses arguments.

Soit t un réel. En calculant $(a + bi)(\cos(t) - i \sin(t))$ de deux façons différentes, démontrer que

$$a \cos(t) + b \sin(t) = A \cdot \cos(t - \varphi).$$

D'une part,

$$(a + bi)(\cos(t) - i \sin(t)) = (a \cos(t) + b \sin(t)) + i(-a \sin(t) + b \cos(t)).$$

D'autre part, $a + bi = Ae^{i\varphi}$ (forme exponentielle du nombre complexe $a + bi$), donc

$$(a + bi)(\cos(t) - i\sin(t)) = Ae^{i\varphi}e^{-it} = Ae^{i(\varphi-t)}.$$

Par unicité des parties réelles,

$$a \cos(t) + b \sin(t) = \Re(Ae^{i(\varphi-t)}) = A \cdot \cos(\varphi - t) = \boxed{A \cdot \cos(t - \varphi)},$$

parce que $\cos$ est paire.

Problème 1 — Irrationalité du nombre e (12 points)

1. Soit n dans $\mathbb{N}$, I un intervalle non trivial, a un élément de I , et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Démontrer par récurrence la formule dite de Taylor-reste intégral :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt.$$

L'intervalle I et le réel a étant donnés, notons, pour chaque entier naturel n , $\mathcal{P}_n$ l'assertion « $\forall f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C}), \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$ ».

Initialisation. Soit f dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ et soit x dans I . On a alors

$$\sum_{k=0}^0 (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x (x-t)^0 \frac{f^{(0+1)}(t)}{0!} dt = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(a) + (f(x) - f(a)) = f(x)$$

si bien que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$. Soit alors f dans $\mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{C})$ et x dans I . Puisque f est *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, l'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt. \quad (*)$$

Si l'on pose $u = t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ et $v = t \mapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}$, on définit deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt &= \int_a^x u'v = \left[uv\right]_a^x - \int_a^x uv' \\ &= \left[0 - \frac{-(x-a)^{n+1}}{n+1} \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\right] - \int_a^x \frac{-(x-a)^{n+1}}{n+1} \frac{f^{(n+2)}(t)}{n!} \\ &= +(x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \int_a^x (x-t)^{n+1} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, tenant compte de $(*)$, il vient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt,$$

ce qui montre $\mathcal{P}_{n+1}$. En conclusion, le principe de récurrence assure la véracité de $\mathcal{P}_n$ quel que soit l'entier n .

2. En déduire que pour tout entier n , $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$.

Soit n dans $\mathbb{N}$. En appliquant ce qui précède à la fonction $\exp$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $I = \mathbb{R}$ et $a = 0$, on obtient, puisque $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ pour tout entier k ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^n x^k \frac{1}{k!} + \int_0^x (x-t)^n \frac{e^t}{n!} dt.$$

En posant $x = 1$, il vient alors

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 (1-t)^n \frac{e^t}{n!} dt$$

3. Démontrer alors que $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Il est impossible d'écrire « $\lim \int = \int \lim$ » en général. On fait donc autrement. Pour tout entier n , l'inégalité triangulaire sur les intégrales affirme que

$$\left| \int_0^1 (1-t)^n \frac{e^t}{n!} dt \right| \leq \int_0^1 \left| (1-t)^n \frac{e^t}{n!} \right| dt = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

Or pour tout t dans $[0, 1]$, $0 \leq 1-t \leq 1$ et $0 \leq e^t \leq e$, donc $0 \leq (1-t)^n e^t \leq e$. Par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e dt = e$. Ainsi,

$$\left| \int_0^1 (1-t)^n \frac{e^t}{n!} dt \right| \leq \frac{e}{n!}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$, le théorème des gendarmes assure la convergence de la suite $\left(\int_0^1 (1-t)^n \frac{e^t}{n!} dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et le fait que sa limite est égale à 0. En conclusion,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

4. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Par télescopage, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. D'autre part, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$. Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n \cdot (n+1) + n - (n+1)^2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!} = \frac{(n+1) \cdot [n - (n+1)] + n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!} = \frac{-1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!} = \frac{1440}{720} + \frac{517}{720} = \frac{1957}{720}$$

quantité qui est strictement négative. Ainsi, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

5. La question 3 nous informe que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e . Justifier alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers e et que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad u_n < e < v_p.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot n!} = 0$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e . De plus, on vient de montrer que les suites u et v étaient adjacentes. La suite u étant croissante, le théorème des suites adjacentes assure (entre autre) que

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad u_n \leq u_{n+1} \leq e \leq v_{p+1} \leq v_p.$$

La stricte monotonie des suites u et v implique des inégalités strictes dans la relation ci-dessus. On a donc, en particulier,

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad u_n < e < v_p$$

6. En déduire deux entier p et q dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\frac{p}{q}$ soit une valeur décimale approchée de e à 10^{-3} près.

On donne $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, u_n et v_n sont des sommes de rationnels : ce sont donc eux-mêmes des rationnels. Pour répondre à la question, il suffit de trouver un entier n tel que $v_n - u_n \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire tel que $\frac{1}{n \cdot n!} \leq 10^{-3}$ ou encore tel que $n \cdot n! \geq 1000$. On dresse un tableau de valeurs :

n	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	2	6	24	120	720
$n \cdot n!$	1	4	18	96	600	4320

La plus petite valeur de n convenant est donc 6. On calcule alors

$$\begin{aligned} u_6 &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\ &= 2 + \frac{(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) + (4 \cdot 5 \cdot 6) + (5 \cdot 6) + 6 + 1}{720} \end{aligned}$$

Remarque. Ces calculs ne nécessitent pas de calculatrice. Armé de patience, on peut aussi faire la division euclidienne et trouver $\frac{1957}{720} \approx$

$$2,718\,0555 \dots$$

7. On imagine un instant que e puisse s'écrire $\frac{a}{b}$ où a et b sont dans $\mathbb{N}^*$. En considérant $b \cdot b! \cdot u_b$, trouver une absurdité.

D'après la question 5, on aurait $u_b < \frac{a}{b} < v_b$, soit encore, après avoir multiplié par $b \cdot b!$,

$$(b \cdot b!)u_b < a \cdot b! < (b \cdot b!)v_b + 1.$$

Or $(b \cdot b!)u_b = b \sum_{k=0}^b \frac{b!}{k!}$ est un entier, car $\frac{b!}{k!} \in \mathbb{N}$ pour tout k dans $\llbracket 0, b \rrbracket$, donc on aurait trouvé un entier, à savoir $a \cdot b!$, strictement compris entre deux entiers consécutifs : absurde! Ainsi, e n'est pas rationnel.

Problème 2 — Extrait de E3A filière PSI (12 points)

On note $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.

Soit p dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier k dans $\llbracket -1, p \rrbracket$, on définit les fonctions f_k sur J par

$$\forall x \in J, \quad f_{-1}(x) = \ln(1+x)$$

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad \forall x \in J, \quad f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. Soit $a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_p$ des réels tels que $\sum_{k=-1}^p a_k f_k$ soit la fonction nulle. Démontrer que $a_{-1} = 0$.

La fonction $\sum_{k=-1}^p a_k f_k$ est nulle, donc en isolant le terme de la somme correspondant à $k = -1$ on obtient

$$\forall x \in J, \quad a_{-1} \ln(1+x) = - \sum_{k=0}^p a_k f_k(x) = - \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{(1+x)^k}.$$

Le membre de droite tend vers $-a_0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (attention au fait que $f_0 = 1$ ne tend pas vers 0 en l'infini, au contraire des autres fonctions f_k). En particulier, c'est une limite finie. Pour que cette égalité soit vraie, il faut donc que $a_{-1} \ln(1+x)$ ait une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, ce qui n'est possible que si $\boxed{a_{-1} = 0}$.

2. Démontrer ensuite que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$ est libre. On pose $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$.

Soit $a_{-1}, a_0, \dots, a_p$ des réels tels que $\sum_{k=-1}^p a_k f_k = 0$. Alors $a_{-1} = 0$ d'après Q1, ce qui nous donne une relation de la forme suivante (après multiplication par $(1+x)^p$) :

$$\forall x \in J, \quad a_0(1+x)^p + a_1(1+x)^{p-1} + \dots + a_{p-1}(1+x) + a_p = 0.$$

La famille $((1+X)^k)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}$ est une famille de $\mathbb{R}_p[X]$ échelonnée en degré, donc elle est libre. On en déduit que la relation ci-dessus implique $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = 0$. Finalement, $a_k = 0$ pour tout k dans $\llbracket -1, p \rrbracket$, ce qui démontre que $\boxed{\mathcal{B} = (f_k)_{-1 \leq k \leq p} \text{ est libre.}}$

Remarque. Une autre stratégie, pour montrer l'indépendance linéaire, est de constater que si i est l'indice du plus grand scalaire a_i non nul de la relation de dépendance ci-dessus, alors $\sum_{k=0}^p a_k f_k(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{a_i}{(1+x)^i}$, et

on en déduit que la fonction $\sum_{k=0}^p a_k f_k$ admet une limite infinie en -1 (ou égale à $a_0 \neq 0$ si $i = 0$) : impossible s'il s'agit de la fonction nulle. Par l'absurde, on en déduit que tous les scalaires a_i sont nuls.

3. Déterminer la dimension de E .

La famille $\mathcal{B}$ engendre E par définition de E , et elle est libre d'après la question précédente. C'est donc une base de E , et on en déduit que $\boxed{\dim(E) = \text{long}(\mathcal{B}) = p + 2}$.

On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $u(f)$ définie sur J par

$$\forall x \in J, \quad (u(f))(x) = (1+x)f'(x).$$

4. Déterminer, pour tout entier k dans $\llbracket 0, p \rrbracket$, l'image de f_k par u .

Soit k dans $\llbracket -1, p \rrbracket$ et x dans J . Par définition de u , $u(f_k)(x) = (1+x)f'_k(x)$. Si $k = -1$, alors $f'_{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$, donc $u(f_{-1})(x) = 1$, tandis que si $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, alors $f'_k(x) = -k(1+x)^{-k-1}$, puis $u(f_k)(x) = -k(1+x)^{-k} = -kf_k$. En conclusion,

$$\boxed{u(f_{-1}) = f_0}, \quad \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad \boxed{u(f_k) = -kf_k}.$$

5. Vérifier que u est un endomorphisme de E .

La linéarité de u provient de la linéarité de la dérivation. De plus, Q4 montre que pour tout k dans $\llbracket -1, p \rrbracket$, $u(f_k) \in E$, et comme $\mathcal{B}$ est génératrice de E , on en déduit que $u(f) \in E$ pour tout f dans E . Ainsi, u est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans E , c'est-à-dire $u \in \mathcal{L}(E)$.

6. Déterminer le noyau et l'image de u .

Déterminons le noyau de u . Soit f dans E tel que $u(f) = 0_E$. Cela signifie

$$\forall x \in J, (1+x)f'(x) = 0.$$

Comme $1+x \neq 0$ pour tout x dans J , on en déduit que $\forall x \in J, f'(x) = 0$. Ainsi, f est de dérivée nulle sur un intervalle, donc f est constante. Réciproquement, toute fonction constante vérifie bien $u(f) = 0_E$, donc $\text{Ker}(u)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur J , ou encore

$$\text{Ker}(u) = \text{Vect}(f_0).$$

Passons à l'image de u . D'après Q5, $f_0 = u(f_{-1}) \in \mathfrak{S}(u)$ et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_k = u(-\frac{1}{k}f_k) \in \mathfrak{S}(u)$. Ainsi, $\text{Vect}(f_0, \dots, f_p) \subset \text{Im}(u)$. Le premier espace vectoriel admet pour base $(f_0, \dots, f_p)$, donc il est de dimension $p+1$, tandis que $\text{Im}(u)$ est de dimension $(p+2) - \dim(\text{Ker}(u)) = p+1$ grâce au théorème du rang. L'inclusion et l'égalité des dimensions impliquent l'égalité des espaces :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_p).$$

7. Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1} par u .

On a vu à Q6 que $f_{-1} \notin \text{Im}(u)$, donc $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \emptyset$.

8. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.

On reprend les calculs effectués à Q4, et on en déduit que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

9. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) : $f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$.

Soit $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur J et vérifiant $\forall t \in J, f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$. Ceci équivaut à

$$\forall t \in J, y'(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}.$$

On reconnaît dans le membre de droite la dérivée de $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^2}{2}$ (en effet c'est de la forme $u'u$ avec $u : t \mapsto \ln(1+t)$). Cette égalité est donc vraie si et seulement s'il existe un réel c tel que

$$\forall t \in J, y(t) = \frac{(\ln(1+t))^2}{2} + c.$$

10. Soit h_2 la solution de (ED) nulle en 0.

(a) On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)y'(t)$ nulle en 0. Expliciter h_3 .

Déterminons d'abord h_2 . D'après la question précédente, il existe un réel c tel que

$$\forall t \in J, h_2(t) = \frac{(\ln(1+t))^2}{2} + c.$$

Or $h_2(0) = 0$ par hypothèse, donc l'égalité précédente implique $c = 0$. Ainsi, h_2 est l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^2}{2}$, et déterminer h_3 revient à résoudre

$$\forall t \in J, h_3'(t) = \frac{1}{2} \frac{(\ln(1+t))^2}{1+t}.$$

Le membre de droite est (à la constante $\frac{1}{2}$ près) de la forme $u'u^2$, donc en imitant la résolution de (ED) on en déduit l'existence d'un c' tel que

$$\forall t \in J, \quad h_3(t) = \frac{(\ln(1+t))^3}{6} + c'.$$

Comme $h_3(0) = 0$, on a encore $c' = 0$, donc

$$h_3 \text{ est l'application } t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^3}{6}.$$

- (b) En itérant le procédé, on note, pour tout entier $k \geq 2$, h_k la solution nulle en 0 de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$. Expliciter h_k .

On démontre par récurrence que pour tout entier $k \geq 2$ et tout $t \in J$,

$$h_k(t) = \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}.$$

L'initialisation a déjà été effectuée dans les deux questions précédentes.

Montrons l'hérédité de cette proposition. Soit k dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que pour tout t dans J , $h_k(t) = \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}$. Alors h_{k+1} est, par définition, l'unique application à vérifier

$$\begin{cases} \forall t \in J, & h'_{k+1}(t) = \frac{h_k(t)}{1+t} = \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+t))^k}{1+t}, \\ h_{k+1}(0) = 0. \end{cases}$$

(Notons que l'existence d'une telle application est assurée par le théorème fondamental de l'analyse.)

L'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^k}{1+t}$ est de la forme $u'u^k$ avec $u : t \mapsto \ln(1+t)$, donc une primitive en est $\frac{u^{k+1}}{k+1}$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{k+1}$. On en déduit qu'il existe un réel c tel que

$$\forall t \in J, \quad h_{k+1}(t) = \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{k+1} + c = \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{(k+1)!} + c,$$

et la condition $h_{k+1}(0) = 0$ donne $c = 0$. Donc h_{k+1} est bien l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{(k+1)!}$, ce qui démontre le résultat voulu au rang $k+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, par récurrence on a montré que pour tout entier $k \geq 2$, la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$ est l'application

$$h_k : t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}.$$