



## Devoir surveillé n° 1

4 heures

## CONSIGNES

*Un malus de 1 point est prévu pour chaque consigne non respectée.*

- Votre copie sera normalisée selon le modèle représenté ci-dessous :

|                           |                   |
|---------------------------|-------------------|
| NOM (en majuscules)       | Date (jj/mm/aaaa) |
| Prénom                    |                   |
| DS n° x de Mathématiques  |                   |
| <div>feuille 1/N</div>    |                   |
| <div>10 lignes min.</div> |                   |

- Numérotez vos feuilles au format  $n/N$  où  $N$  est le nombre total de feuilles.
- Tracez une **marge permanente** sur la gauche pour les annotations.
- Vous traiterez les exercices et les questions **dans l'ordre** quitte à sauter des questions si vous ne savez pas y répondre.
- On attend une copie soignée, écrite dans un **français correct**. En particulier, les *accents* ne sont pas optionnels dans la langue française.
- On s'efforce de respecter la syntaxe mathématique : usage des quantificateurs, présentation des objets, différence entre *posons*, *notons*, *soit*, distinction entre  $f$  et  $f(x)$ , etc.

*De plus, en vu de la préparation aux écrits de concours :*

- On demande 

d'encadrer

 ou au moins de souligner vos résultats (avec une règle!).
- Le **BLANCO EST INTERDIT** ainsi que toute autre pâte ou ruban correcteur. Les éventuelles ratures doivent être exceptionnelles et réalisées avec une règle.
- La **CALCULATRICE** est interdite.

**Tout appareil connecté est éteint, le mode avion n'est pas autorisé**

## Formalisme mathématique (7 points)

1. Soit  $f$  une fonction, définie sur un intervalle non trivial  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Traduire dans un français correct, si possible concis, sans mot-à-mot et sans écrire les lettres muettes les assertions proposées.
  - (a)  $\forall t \in I, \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, |h| \leq \delta \implies \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} - \ell \right| \leq \varepsilon.$
  - (b)  $\exists t \in I, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, |h| \leq \delta \implies \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| \leq \varepsilon.$
2. Traduire en langage mathématique « on peut trouver des fonctions bijectives de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^2$  ».
3. Traduire en langage mathématique « une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^2$  ne peut jamais être linéaire ».
4. Il est bien connu que tout réel de  $[0, 1[$  peut s'écrire  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$  pour une unique suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs dans  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  qui ne stationne pas à 9.
  - (a) Traduire en langage mathématique « la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne stationne pas à 9 ».
  - (b) Si on note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des suites de  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  qui ne stationnent pas à 9, de quelle bijection parle le fait bien connu ?
  - (c) Quelle est la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  si le réel de  $[0, 1[$  est le nombre  $\frac{1}{3}$  ? Et si c'est le nombre  $\frac{1}{4}$  ?
  - (d) (Bonus : +1) : en considérant le réel  $\frac{1}{2}$ , montrer que si l'on enlève l'hypothèse « qui ne stationne pas à 9 », on perd l'unicité de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## Questions de cours sans démonstration (4 points)

N'oubliez pas :

- Une définition commence, le plus souvent, par « on dit que » ou « on appelle ».
- Un théorème s'énonce en présentant les objets, les hypothèses sur ces objets puis la conclusion.

1. Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $I$  un intervalle non trivial et  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction. Si  $a \in I$ , quand dit-on que  $\gamma$  est dérivable en  $a$  ?
2. Énoncer le théorème de l'approximation affine concernant un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
3. Énoncer le théorème du rang.
4. Comment définit-on
  - (a) la fonction exponentielle réelle ?
  - (b) le nombre  $e^z$ , si  $z \in \mathbb{C}$  ?
  - (c) le nombre  $a^z$ , si  $z \in \mathbb{C}$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$  ?

## Question de cours avec démonstration (2 points)

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. On suppose que

- l'espace  $E$  possède une base  $(e_i)_{i \in I}$  ;
- l'application  $f$  est injective.

Démontrer que la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille libre dans  $F$ .

## Exercice 1 — Nombres complexes (2 points)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$  : le nombre complexe  $a + bi$  n'est donc pas nul.

On note  $A$  le module de  $a + bi$  et  $\varphi$  l'un de ses arguments.

Soit  $t$  un réel. En calculant  $(a + bi)(\cos(t) - i \sin(t))$  de deux façons différentes, démontrer que

$$a \cos(t) + b \sin(t) = A \cdot \cos(t - \varphi).$$

## Exercice 2 — Une équation non linéaire (8 points)

On souhaite résoudre

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R}_+, N'(t) = 3N(t) - 5N(t)^2.$$

avec la condition initiale  $N(0) = 2$ .

1. On suppose que  $N$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que  $N$  est solution de (E) si et seulement si  $\frac{1}{N}$  est solution d'une équation différentielle linéaire (E').
2. Résoudre (E'), puis déterminer la fonction  $N$  de l'énoncé.
3. Après avoir étudié les variations de  $N$ , tracer la courbe  $\mathcal{C}$  représentant  $N$ . On marquera toutes les données graphiques pertinentes : tangente en 0, asymptote, etc.
4. Déterminer l'abscisse  $\tau$  en laquelle la tangente en 0 de  $\mathcal{C}$  rencontre l'axe des abscisses.

## Problème 1 — Irrationalité du nombre $e$ (12 points)

1. Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $I$  un intervalle non trivial,  $a$  un élément de  $I$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . Démontrer par récurrence la formule dite de Taylor-reste intégral :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt.$$

2. En déduire que pour tout entier  $n$ ,  $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ .

3. Démontrer alors que  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ .

$$\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*, \text{ on pose } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

4. Justifier que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante et que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement décroissante.
5. La question 3 nous informe que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $e$ . Justifier alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge aussi vers  $e$  et que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad u_n < e < v_p.$$

6. En déduire deux entiers  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{N}^*$  tels que  $\frac{p}{q}$  soit une valeur décimale approchée de  $e$  à  $10^{-3}$  près. On donne le tableau de valeurs suivant.

|      |   |   |    |     |     |       |        |         |           |
|------|---|---|----|-----|-----|-------|--------|---------|-----------|
| $n$  | 2 | 3 | 4  | 5   | 6   | 7     | 8      | 9       | 10        |
| $n!$ | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5 040 | 40 320 | 362 880 | 3 628 800 |

7. On imagine un instant que  $e$  puisse s'écrire  $\frac{a}{b}$  où  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbb{N}^*$ . En considérant  $b \cdot b! \cdot u_b$ , trouver une absurdité.

## Problème 2 — Concours E3A (extrait), PSI (14 points)

On note  $F$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur  $J = ]-1, +\infty[$  à valeurs réelles.

Soit  $p$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour tout entier  $k$  dans  $\llbracket -1, p \rrbracket$ , on définit les fonctions  $f_k$  sur  $J$  par

$$\forall x \in J, f_{-1}(x) = \ln(1+x)$$

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \forall x \in J, f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. Soit  $a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_p$  des réels tels que  $\sum_{k=-1}^p a_k f_k$  soit la fonction nulle. Démontrer que  $a_{-1} = 0$ .
2. Démontrer ensuite que la famille  $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$  est libre. On pose  $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$ .
3. Déterminer la dimension de  $E$ .

On note  $u$  l'application qui à toute fonction  $f$  de  $E$  associe la fonction  $u(f)$  définie sur  $J$  par

$$\forall x \in J, \quad (u(f))(x) = (1+x)f'(x).$$

4. Déterminer, pour tout entier  $k$  dans  $\llbracket 0, p \rrbracket$ , l'image de  $f_k$  par  $u$ .
5. Vérifier que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .
6. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .
7. Préciser  $u^{-1}(\{f_{-1}\})$ , l'ensemble des antécédents de  $f_{-1}$  par  $u$ .
8. Déterminer la matrice  $M$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
9. Résoudre sur  $J$  l'équation différentielle (ED) :  $f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$ .
10. Soit  $h_2$  la solution de (ED) nulle en 0.
  - (a) On note  $h_3$  la solution de l'équation différentielle  $h_2(t) = (1+t)y'(t)$  nulle en 0. Expliciter  $h_3$ .
  - (b) En itérant le procédé, on note, pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $h_k$  la solution nulle en 0 de l'équation différentielle  $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$ . Expliciter  $h_k$ .