



Devoir libre n° 3
à rendre le lundi 9 mars

I Perfectionnement rédactionnel

Vous êtes invités à étudier à nouveau le « *document de vacances* » (*cliquer sur ce lien*), notamment :

- toute la section 1, qui commence page 17 ;
- la section 2.1 page 20 ;
- la section 2.5 page 22 ;
- la section 4 page 31.

I.1 Travail avec I.A.

• (Uniquement pour celles ou ceux dont les copies comportent les mentions *orthog.* dans la marge). Demander à une I.A. en ligne de produire (ou *générer...*) **cinq exercices par jour**, qui seront courts et de type dictée. Vous pouvez par exemple recopier dans le script de la requête les phrases que vous avez écrites sur vos copies. Vous pouvez aussi lui demander de cibler les exercices avec les mots-clés suivants : accord en genre et en nombre, confusion participe passé/infinif, utilisation abusive de « que », accentuation, concordance des temps, etc. Lui préciser que les phrases doivent s'inscrire dans un contexte mathématique niveau CPGE.

• (Pour tout le monde). Demander à une I.A. en ligne de produire (ou *générer...*) **deux exercices de calcul de dérivée par jour**. Lui demander des produits, des quotients, des composées, des composées de composées, en précisant : niveau CPGE. Après cela, tout le monde doit savoir dériver $t \mapsto \sin^n(t) \cos(t)$ sans se tromper.

I.2 Quantificateurs

Corriger les mauvais usages suivants concernant les quantificateurs. De plus, des erreurs de français ou de syntaxe mathématique sont mises en couleur : les corriger elles aussi.

1. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x)$ est dérivable.
2. Posons f la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$. On calcule $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = [\ln(x^2 + 1)]' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

3. Il est vrai de dire

$$\exists x \in \mathbb{C} \text{ tel que } x^2 = 1 + i.$$

On a alors $x^4 = (x^2)^2 = (1 + i)^2 = 2i$.

4. Dans $\mathbb{R}$, tous les carrés sont positifs, c'est-à-dire que

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

I.3 Énoncer une définition ou un théorème

Exercice 1

On demande la définition d'une matrice diagonalisable. Les définitions suivantes sont toutes incorrectes : expliquer pourquoi.

1. M est diagonalisable quand $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
2. Si M est une matrice carrée de taille n , on dit que M est diagonalisable si et seulement si
$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim E_{\lambda}(M) = n.$$
3. Soit D une matrice diagonale et P une matrice inversible. Une matrice carrée M est dite diagonalisable quand $M = PDP^{-1}$.
4. On dit qu'une matrice carrée M est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle M est diagonale.

Exercice 2

La préposition *avec* est bien trop polysémique (que veut dire ce mot ?) pour être utilisée fréquemment en mathématiques. Dans les phrases suivantes, remplacer chaque occurrence de cette préposition par un mot plus précis.

1. Théorème de Bézout — Soit a et b des entiers **avec** $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Alors $au + bv = 1$ **avec** u et v dans $\mathbb{Z}$.
2. Théorème de division euclidienne dans $K[X]$ — Soit K un corps et soit P et Q dans $K[X]$ **avec** $Q \neq 0$. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $A = BQ + R$ **avec** $\deg R < \deg B$.
3. Définition d'une matrice trigonalisable — Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **avec** n un entier naturel non nul. La matrice M est dite trigonalisable quand $M = PTP^{-1}$ **avec** P inversible et T triangulaire supérieure.

II Exercice d'Algèbre

Soit n un entier au moins égal à 2. On note J la matrice de format $n \times n$ suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

1. À l'aide de l'endomorphisme associé, calculer J^n et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le spectre complexe et les espaces propres de J .
3. Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont des complexes, calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Indication : on pourra exprimer cette matrice comme un polynôme en J .

III Exercices d'Analyse

III.1 Intégrales généralisées

L'intégrale (dite de Dirichlet) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente. On se propose de trouver sa valeur.

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\omega > 0$. Grâce à une intégration par parties, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\omega n t} dt = 0$ (lemme de Riemann-Lebesgue¹ version $\mathcal{C}^1$).
2. Pour tout entier naturel n , on pose

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

Montrer que J_n et K_n sont des intégrales convergentes.

3. Montrer que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ se prolonge par continuité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et que ce prolongement, noté $\hat{\varphi}$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Exprimer $K_n - J_n$ à l'aide de la fonction $\hat{\varphi}$ et montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.
5. Conclure grâce au lemme de Riemann-Lebesgue.

III.2 Suites et séries de fonctions

Partie A

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales, définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. On suppose que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f .

1. Montrer qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |P_N(x) - P_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire que f est nécessairement polynomiale. *Indication.* Que dire d'une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$?

Remarque. Ce résultat est faux sur un segment : on peut montrer que toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiale (théorème dû à Weierstrass).

Partie B

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales dont tous les degrés sont majorés par un entier d , toutes définies sur un intervalle I quelconque (mais de longueur non nulle). On suppose que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f .

1. Montrer que f est une fonction polynomiale de degré au plus d . On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $d+1$ points distincts de I . Interpréter ce résultat en termes de propriété conservée par un certain mode de convergence.
2. Prouver que la convergence de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est en réalité uniforme sur tout segment.
3. On suppose que I n'est pas borné et que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I . Montrer qu'il existe une suite réelle $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que l'on ait $P_n = f + c_n$ pour tout n suffisamment grand.

IV Exercices de Probabilités

Exercice 1

Soit P une mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{n\}) = 0$.

Indication. Que dire du terme général d'une série convergente ?

Exercice 2

Montrer la famille $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une distribution de probabilités. On note P la mesure de probabilité associée sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Si $k \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité qu'un entier choisi au hasard soit un multiple de k ? On devra distinguer une valeur de k .

1. Le véritable théorème de Riemann-Lebesgue s'énonce pour les fonctions admettant une intégrale au sens de Riemann (cf. début du chap. 9) sur $[a, b]$.