

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

**SESSION 2025 Principale**

# **CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE**

---

## **ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

---

**Durée : 2 Heures  
Coefficient : 1**

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde ,
- 2 pages d'avertissement,(recto-verso)
- 15 pages de texte (recto-verso) numérotées de 1 à 15

|                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT<br/>(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)</b></p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES****A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT**

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à bille ou feutre à encre foncée : bleue ou noire. Vous devez **cocher** lisiblement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 3) Si vous voulez **modifier** votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la 2<sup>ème</sup> ligne.
- 4) Si vous voulez **annuler** votre réponse, vous devez cocher la case « Ann ». Dans ce cas-là, aucune réponse ne sera prise en compte.
- 5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.  
**Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.**

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : le logiciel de correction lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'il aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 80 sont neutralisées).  
Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.  
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :
  - soit vous décidez de ne pas traiter cette question,  
*la ligne correspondante doit rester vierge.*
  - soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,  
*vous devez cocher l'une des cases A, B, C, D.*
  - soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,  
*vous devez cocher deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
  - soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,  
*vous devez alors cocher la case E.*

**En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.**

## 7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 :  $1^2 + 2^2$  vaut :

- A) 3    B) 5    C) 4    D) -1

Question 2 : le produit  $(-1)(-3)$  vaut :

- A) -3    B) -1    C) 4    D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation  $x^2 - 1 = 0$  est :

- A) 1    B) 0    C) -1    D) 2

**Vous marquerez sur la feuille réponse :**

1 -

|                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| A                        | B                                   | C                        | D                        | E                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

2 -

|                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| A                        | B                        | C                        | D                        | E                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |

3 -

|                                     |                          |                                     |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| A                                   | B                        | C                                   | D                        | E                        |
| <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

# Sujet principal 2025

## QUESTIONS LIÉES

2,3 et 4

5 et 6

12 et 13

14 à 17

18 à 20

21 et 22

## PARTIE 1

On définit une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ .

### Question 1

- A) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(-X) = -T_n(X)$ .
- B) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(-X) = T_n(X)$ .
- C) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ .
- D) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(-X) = T'_n(X)$ .

### Question 2

- A) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\sin(\theta)) = \sin(n\theta)$ .
- B) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\sin(\theta)) = (\sin(\theta))^n$ .
- C) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .
- D) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = (\cos(\theta))^n$ .

### Question 3

On suppose que  $n \in \mathbb{N}^*$  et on note  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les racines complexes de  $T_n$  comptées avec leur ordre de multiplicité.

- A) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut avoir  $\alpha_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ .
- B) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut avoir  $\alpha_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ .
- C) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut avoir  $\alpha_k = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ .
- D) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut avoir  $\alpha_k = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ .

#### Question 4

On suppose que  $n \in \mathbb{N}^*$  et on note  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les racines complexes de  $T_n$  comptées avec leur ordre de multiplicité.

- A)  $\prod_{k=1}^n \alpha_k = (-1)^n.$
- B)  $\prod_{k=1}^n \alpha_k = 1.$
- C)  $\prod_{k=1}^n \alpha_k = 0$  si  $n$  est pair et  $\prod_{k=1}^n \alpha_k = (-1)^{(n-1)/2}$  si  $n$  est impair.
- D)  $\prod_{k=1}^n \alpha_k = (-1)^{n/2}$  si  $n$  est pair et  $\prod_{k=1}^n \alpha_k = 0$  si  $n$  est impair.

#### Question 5

- A) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}.$
- B) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (1 - X^2)^k X^{n-2k}.$
- C) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{2n-k}.$
- D) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (1 - X^2)^k X^{2n-k}.$

#### Question 6

- A) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [-1, 1]$  :

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[ (x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n \right]$$

- B) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [-1, 1]$  :

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[ (x + \sqrt{1-x^2})^n + (x - \sqrt{1-x^2})^n \right]$$

C) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [-1, 1]$  :

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[ (x + \sqrt{1-x^2})^n + (x - \sqrt{1-x^2})^n \right]$$

D) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [-1, 1]$  :

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[ (x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n \right]$$

## PARTIE 2

Si  $n \in \mathbb{N}^*$  on note  $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ .  
On rappelle que  $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$  où  $\omega = e^{i2\pi/n}$ .

### Question 7

Dans cette question l'entier naturel  $n$  est supposé supérieur ou égal à 2.

- A)  $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = \frac{1}{\omega-1}$ .
- B)  $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = \frac{n}{\omega-1}$ .
- C)  $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = n(k+1)\omega^k$ .
- D)  $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = \frac{k}{\omega-1}$ .

### Question 8

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- A)  $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| = -1$ .
- B)  $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| = \arctan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ .
- C)  $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ .
- D)  $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ .

### Question 9

Soit  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

- A) Si  $(z, z') \in (\mathbb{U}_n)^2$  alors  $z + z' \in \mathbb{U}_n$ .
- B) Si  $z \in \mathbb{U}_n$  et si  $z' \in \mathbb{U}_m$  alors  $z \times z' \in \mathbb{U}_{\max(n, m)}$ .
- C) Si  $z \in \mathbb{U}_n$  et si  $z' \in \mathbb{U}_m$  alors  $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}_{\min(n, m)}$ .
- D) Dans  $\mathbb{C}[X]$  on a :  $\prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z) = X^n + 1$ .

### Question 10

Soit  $z = \frac{3+4i}{5}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $x_n = \operatorname{Re}((3+4i)^n)$  et  $y_n = \operatorname{Im}((3+4i)^n)$ .

- A) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$  et  $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$ .
- B) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $(k_n, k'_n) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $x_n = 3 + 5k_n$  et  $y_n = 4 + 5k'_n$ .
- C) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $(k_n, k'_n) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $x_n = 4 + 5k_n$  et  $y_n = 3 + 5k'_n$ .
- D) On a  $|z| = 1$  donc il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $z \in \mathbb{U}_n$ .

### Question 11

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $\omega = \exp(i2\pi/(n+1))$ .

On se donne aussi  $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p \in \mathbb{C}_n[X]$  quelconque et on note  $M$  le réel défini par  $M = \max \left\{ |P(\omega^k)| \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$ .

- A) On a  $M > 0$ .
- B) Pour tout  $p \in \mathbb{Z}$  on a  $\sum_{k=0}^n (\omega^k)^p = 0$ .
- C) On a  $\left| \sum_{k=0}^n P(\omega^k) \right| \leq (n+1)M$ .
- D) On a  $|a_0| \leq M$ .

## PARTIE 3

Soit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  telle que  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$ .

### Question 12

- A)  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite croissante.
- B)  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite décroissante.
- C)  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite bornée.
- D)  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'est pas une suite majorée.

### Question 13

On définit aussi une suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$ .

- A)  $(v_n)_{n \geq 0}$  est une suite arithmétique.
- B)  $(v_n)_{n \geq 0}$  est une suite convergente.

C) Si  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  alors  $u_n - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^n$ .

D) Si  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  alors  $u_n - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $u_n = \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

#### Question 14

A)  $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

B)  $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

C)  $(u_n)$  est une suite convergente.

D)  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

#### Question 15

Si  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t) dt. \text{ On se donne } n \in \mathbb{N}^*.$$

A)  $\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) - f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$

B)  $\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$

C)  $\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt + \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$

D)  $\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k.$

### Question 16

On se donne  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $n \leq p$  et on pose  $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ .

- A)  $0 \leq \sum_{k=n}^p J_k \leq \frac{1}{8} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right).$
- B)  $0 \leq \sum_{k=n}^p J_k \leq \frac{1}{8} \left( \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{p^2} \right).$
- C)  $0 \leq \sum_{k=n}^p J_k \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right).$
- D)  $0 \leq \sum_{k=n}^p J_k \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{p^2} \right).$

### Question 17

- A) Il existe un réel  $\alpha$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$
- B) Il existe un réel  $\alpha$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$
- C) Il existe un réel  $\alpha$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$
- D) Il existe un réel  $\alpha$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

## **PARTIE 4**

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels strictement positifs. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

### **Question 18**

On suppose que la série  $\sum u_n$  converge.

- A) La série  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  converge.
- B) La série  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  diverge.
- C) La série  $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$  converge.
- D) La série  $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$  diverge.

### **Question 19**

On suppose que la série  $\sum u_n$  diverge.

- A) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$  alors  $\frac{u_n}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ .
- B) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$  alors la série  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  diverge.
- C) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$  alors la série  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  converge.
- D) Si la suite  $\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)_{n \geq 1}$  ne converge pas vers 1 alors la série  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  converge.

### **Question 20**

On suppose que la série  $\sum u_n$  diverge.

- A) La série  $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$  converge.
- B) La série  $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$  diverge.
- C) La série  $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$  converge.
- D) La série  $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$  diverge.

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$ .

### Question 21

Après linéarisation :

- A)  $\sin^3(x) = \frac{3}{4} \cos(x) - \frac{3}{4} \cos(3x)$ .
- B)  $\sin^3(x) = \frac{1}{4} \sin(3x) - \frac{3}{4} \sin(x)$ .
- C)  $\sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} \sin(3x)$ .
- D)  $\sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$ .

### Question 22

- A) La série  $\sum u_n$  diverge.
- B) La série  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\frac{1}{4} \sin(x)$ .
- C) La série  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \sin(3x)$ .
- D) La série  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin(x)$ .

### Question 23

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}$ .

- A) La série  $\sum u_n$  diverge.
- B) La série  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^{\cos(2\theta)} \cos(\sin(2\theta))$ .
- C) La série  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^{\cos(2\theta)}$ .
- D) La série  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^{\cos(2\theta)} \cos(2\theta)$ .

## PARTIE 5

$\mathbb{K}$  désigne indifféremment  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Question 24

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

- A)  $(X, X^4)$  est une base de  $\mathbb{F} = \{aX^4 + (a+b)X \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- B) Si  $(P_1, \dots, P_n)$  est une famille de polynômes de  $\mathbb{K}_n[X]$  de degrés deux à deux distincts alors elle est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- C) Si  $\mathbb{G} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid X^3 \text{ divise } P\}$  alors  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{G} \oplus \mathbb{K}_3[X]$ .
- D) La famille  $(X^k(X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$  est libre dans  $\mathbb{K}[X]$ .

### Question 25

Soit  $n$  est un entier naturel non nul.

- A) Si  $\mathbb{F} = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$  et  $\mathbb{G} = \text{Vect}((0, 1, 2))$  alors  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ .
- B) Si  $\mathbb{E}$  est un espace vectoriel de dimension finie et au moins égale à 2 et si  $\mathbb{H}$  est un hyperplan de  $\mathbb{E}$ , alors pour tout vecteur  $x \in \mathbb{E}$  non nul on a  $\mathbb{E} = \mathbb{H} \oplus \text{Vect}(x)$ .
- C) Si  $\mathbb{F}$  est l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et si  $\mathbb{G}$  est l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ .
- D) Si  $\mathbb{E}$  est un espace vectoriel de dimension finie au moins égale à 2 et si  $x$  et  $y$  sont des vecteurs distincts de  $\mathbb{E}$  alors  $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x) \oplus \text{Vect}(y)$ .

### Question 26

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice relativement aux bases canoniques est  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{H}$  l'ensemble des applications linéaires  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}^2$  telles que  $f \circ g \circ f = 0$ .

- A)  $f$  est surjective.
- B)  $f$  est injective.
- C) Il existe  $g \in \mathcal{H}$  telle que  $g$  est injective.
- D)  $\mathcal{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  de dimension 2.

### Question 27

Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel non réduit à  $\{0_E\}$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{E}$ .

- A) Si  $x \in \mathbb{E}$  et  $f(x) = 0_E$  alors  $x = 0_E$  puisque  $f$  est linéaire.
- B)  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .
- C)  $\mathbb{E} = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ .
- D) Comme  $f$  est un endomorphisme on a  $\text{Im}(f) \subseteq \text{Im}(f^2)$ .

### Question 28

Soit  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

- A) Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Alors :  $MD = DM \iff M$  est triangulaire.
- B) L'équation  $M^3 - 2M = D$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  a 3 solutions.
- C) L'équation  $M^3 - 2M = D$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  a 6 solutions.
- D) L'équation  $M^3 - 2M = D$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  a 9 solutions.

### Question 29

Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel non réduit à  $\{0_E\}$ .

Soient  $p$  et  $q$  des projecteurs de  $\mathbb{E}$ .

- A)  $p + q$  est un projecteur.
- B) Il existe un réel  $\alpha \neq 0$  tel que  $\alpha p$  est un projecteur.
- C) On a  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(q)$  et  $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$ .
- D)  $\text{Im}(p) = \text{Im}(q)$  si et seulement si  $p \circ q = q$  et  $q \circ p = p$ .

### Question 30

On considère  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique et on note  $p$  projection orthogonale sur le plan  $\mathbb{F}$  d'équation  $x + y + z = 0$ . On note  $M$  la matrice de  $p$  dans la base canonique.

A)  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

B)  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

C) Si  $u = (1, 2, 3)$  alors la distance de  $u$  à  $\mathbb{F}$  est  $d(u, \mathbb{F}) = 6$ .

D) Si  $u = (1, 2, 3)$  alors la distance de  $u$  à  $\mathbb{F}$  est  $d(u, \mathbb{F}) = 2$ .

### Question 31

On considère  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique et on note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A)  $f$  est un projecteur orthogonal.

B)  $f$  est une symétrie orthogonale.

C) La symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Im}(f)$  est représentée dans

la base canonique par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

D) La symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Im}(f)$  est représentée dans

la base canonique par  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

### Question 32

Soit  $\mathbb{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie notée  $n$  et non réduit à  $\{0_E\}$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{E}$  tel que  $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0$  et  $f \neq \text{id}_E$ .

- A)  $f$  est un projecteur.
- B)  $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ .
- C)  $\dim(\text{Ker}(f - \text{id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id}_E)) \geq n$ .
- D)  $\mathbb{E} \neq \text{Ker}(f - \text{id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ .

## PARTIE 6

### Question 33

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On lance  $2n$  fois une pièce de monnaie équilibrée.

- A) La probabilité d'avoir autant de « pile » que de « face » est égale à  $\binom{2n}{n} \frac{1}{2^n}$ .
- B) La probabilité d'avoir une alternance de « pile » et de « face » commençant par « pile » (ie PFPPFP...PF) est égale à  $\frac{1}{2^n}$ .
- C) La probabilité d'avoir au plus un « pile » est de égale à  $\frac{n+1}{2^n}$ .
- D) En moyenne le nombre de « pile » obtenu est égal à  $n$ .

### Question 34

On dispose de 2 dés A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On commence par lancer une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir « pile » soit  $1/3$ .

- Si on obtient « pile » on décide de jouer **uniquement** avec le dé A;
- Si on obtient « face » on décide de jouer **uniquement** avec le dé B.

- A) La probabilité d'avoir une face rouge au premier lancer de dé est égale à  $\frac{2}{9}$ .
- B) La probabilité d'avoir deux faces rouges aux deux premiers lancers est égale à  $\frac{2}{9}$ .
- C) Les événements « avoir une face rouge au premier lancer de dé » et « avoir une face rouge au second lancer de dé » sont indépendants.
- D) Sachant que les deux premiers lancers de dé ont donné deux faces rouges, la probabilité d'avoir une face rouge au troisième lancer de dé est égale à  $\frac{2}{9}$ .

### **Question 35**

Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes deux une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $T = U_1 - U_2$  et  $V = U_1 + U_2$ .

- A)  $T$  et  $V$  suivent une loi binomiale.
- B) Il existe un  $p \in ]0, 1[$  pour lequel  $T$  et  $V$  suivent une loi uniforme.
- C)  $\text{Cov}(T, V) = 0$ .
- D)  $T$  et  $V$  sont indépendantes.

### **Question 36**

On considère  $b$  boules ( $b \geq 2$ ) numérotées de 1 à  $b$  réparties dans deux urnes  $A$  et  $B$ . Lors de chaque étape on tire au hasard un entier entre 1 et  $b$ , et on change d'urne la boule portant ce numéro. On note  $X_n$  la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne  $A$  à l'étape  $n$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ). Initialement il y a donc  $X_0$  boules dans l'urne  $A$  et  $b - X_0$  boules dans l'urne  $B$ .

- A) La variable aléatoire  $X_{n+1} - X_n$  prend ses valeurs dans  $\{-1, 1\}$ .
- B) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = 1 - \frac{2}{b}E(X_n)$ .
- C) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{b}\right)E(X_n) + 1$ .
- D)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = \frac{b}{2}$ .