Année 2024/25

Devoir libre n° 2
Suites de Cauchy
pour le lundi 3 mars

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cet espace est dite *de Cauchy* quand

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \Big[(n \geqslant \mathrm{N}\ \wedge p \geqslant \mathrm{N}) \Longrightarrow \|x_n - x_p\| \leqslant \varepsilon\Big],$$

autrement dit, quand la distance séparant deux termes est aussi petite que l'on veut pourvu que leurs indices soit assez grands.

Le but de ce devoir est
— de montrer que les suites convergentes sont toutes de Cauchy, mais que la réciproque n'est pas toujours vraie. Quand elle est vraie, on dit que l'espace normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est *complet*.
— de montrer que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, ainsi que tous les espaces normés de dimension finie.
— de donner un critère de complétude d'un espace normé faisant intervenir les séries absolument convergentes.
— de démontrer le théorème de la double limite qui a été admis dans le cours.

On rappelle que le théorème de Bolzano-Weierstrass stipule que de toute suite (réelle ou complexe) bornée, on peut extraire une suite convergente. Ce théorème reste vrai dans un espace de dimension finie, par exemple dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I Propriétés des suites de Cauchy

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que toute suite convergente de $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est une suite de Cauchy.

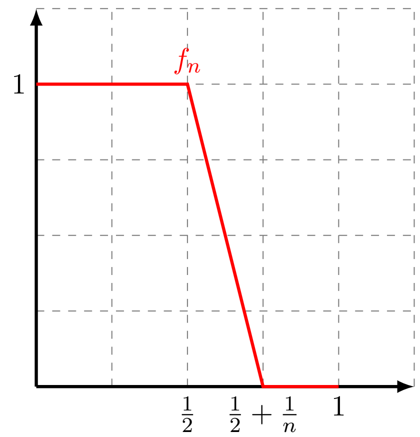
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$. En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition, démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement une suite bornée.

3. Montrer que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, bien que bornée, n'est pas une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique (c'est-à-dire réelle ou complexe) qui est de Cauchy. Étant bornée (question 2), on dispose d'une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante). Notons ℓ sa limite. En écrivant, pour tout entier n,
$$x_n - \ell = x_n - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - \ell,$$
démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

5. Si E est de dimension finie, démontrer que toute suite de Cauchy est convergente.

6. Dans cette question on note E l'espace $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par
$$\forall f \in \mathrm{E},\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$
On considère alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout entier naturel non nul n, f_n est l'élément de E dont la représentation graphique est la suivante.



(a) Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy.

(b) Démontrer pourtant que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas ; on pourra procéder par l'absurde et justifier les valeurs prises par la fonction limite f sur $[0,\frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2},1]$.

7. L'espace $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ est cette fois muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de cet espace.

(a) Montrer que pour chaque réel x de $[0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(b) En déduire que $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est complet.

II Lien avec l'absolue convergence

Soit $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle que dire que $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ est complet, c'est dire que toutes les suites de Cauchy de $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ sont convergentes.

1. On suppose que $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ est complet. Soit alors $\sum x_n$ une série d'éléments de E qui est absolument convergente, c'est-à-dire telle que la série numérique $\sum \|x_n\|$ converge. Démontrer que la série $\sum x_n$ converge. *On pourra montrer que la suite de ses sommes partielles est une suite de Cauchy.*

2. Réciproquement, on suppose que toutes les séries absolument convergentes de $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ sont convergentes. Démontrer que $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ est complet. *On pourra justifier l'existence d'une fonction* $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $\forall n\in\mathbb{N},\ \|x_{\varphi(n+1)}-x_{\varphi(n)}\|\leqslant 2^{-n}$.

3. Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \|P\|=\max_{n\in\mathbb{N}}|p_n|$, où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des coefficients de P (sa nullité à partir d'un certain rang assure l'existence de ce « max »). Prouver que $(\mathbb{R}[X],\|\cdot\|)$ n'est pas complet : on pourra s'inspirer d'une série de cet espace vue en TD.

III Théorème de la double limite

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et soit a adhérent à I, éventuellement égal à $\pm\infty$. On suppose que

— la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $f:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$.

— pour tout entier n, la limite $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$, notée ℓ_n existe dans $\mathbb{K}$.

1. Montrer que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. D'après I-Q4, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite. Soit ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Justifier l'existence d'un entier N_1 tel que $\|f_n-f\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $n\geqslant\mathrm{N}_1$.

(b) Justifier l'existence d'un entier N_2 tel que $\|\ell_n-\ell\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $n\geqslant\mathrm{N}_2$.

(c) Montrer alors que f admet ℓ pour limite en a.

3. Expliquer en quoi cela démontre une interversion de deux limites.