Année 2024/25

Devoir libre n° 1
Stirling par Wallis
pour le lundi 4 novembre.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$\boxed{\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x}.$$

1. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Rappel : le théorème de stricte croissance de l'intégrale stipule que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* **continue** *et positive sur* $[a,b]$, *alors* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ *sur* $[a,b]$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$\mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n.$$
3. En déduire que la suite $((n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et trouver sa valeur.
4. Grâce à un produit télescopique, démontrer que pour tout entier naturel p,
$$\mathrm{W}_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
5. Déduire des deux questions précédentes une expression de W_{2p+1}.
6. Prouver que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $1 - \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} < 1$ (*on pourra utiliser la question 1*).
7. En déduire que $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_{n+1}$.
8. Montrer finalement la *formule de Wallis* : $\boxed{\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$.
9. On a montré dans le cours du chapitre 3 qu'il existait une constante K telle que $n! \sim \mathrm{K}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. Déterminer la valeur de K grâce à tout ce qui précède.