



Devoir libre n° 1
pour le lundi 3 novembre

Une copie impeccable est exigée :

- propreté, lisibilité ;
- orthographe, grammaire, syntaxe ;
- résultats soulignés ou encadrés.

Une partie du DS n° 2 comportera des questions sur ce devoir : cherchez-le avec soin.

Partie 1

Du calcul

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

Si $n \geq 2$, simplifier le plus possible $u_n - u_{n-1}$.

2. On note f la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$.

- (a) Donner la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle f est définie.
- (b) Déterminer la limite de f en 0^+ et en 0^- .
- (c) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
- (d) Expliciter f' et f'' .
- (e) Démontrer par récurrence que pour tout entier non nul n , il existe une fonction rationnelle Φ_n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f^{(n)}(x) = \Phi_n(x)e^{-\frac{1}{x}}.$$

3. Résoudre les équations différentielles proposées, en précisant l'intervalle de définition.

- (a) $y'(x) = xy(x)$.
- (b) $y(x) = xy'(x)$.
- (c) $y'(x) + xy(x) = 1$.
- (d) $y'' + y' + y = 0$ (forme complexe et forme réelle).
- (e) $y'' + y' + y = 1$ (forme complexe et forme réelle).

4. Faire des fiches (manuscrites !) sur les développements limités usuels. Les réviser chaque jour.

- (a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\ln(1 + \sin(x))$.
- (b) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sqrt{3 + \cos(x)}$.
- (c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$.

Partie 2

Les intégrales de Wallis et la formule de Stirling

Pour tout entier naturel n , on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx.$$

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

3. En déduire que la suite $\left((n+1)W_{n+1}W_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, et trouver sa valeur.
4. Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$.
5. Grâce à un produit télescopique, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Donner alors une expression de W_{2p+1} quel que soit l'entier p .

6. Prouver que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$1 - \frac{1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

et en déduire que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{n+1}$.

7. Montrer finalement la *formule de Wallis* : $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8. On a montré dans le cours du chapitre 3 qu'il existait une constante K telle que $n! \sim K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Déterminer la valeur de K grâce à tout ce qui précède.

Partie 3

Seulement pour ceux voulant passer les écrits de concours

Concours E3A (extrait : exercice 1 sur un sujet en comportant 4) – filière PSI

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout élément f de $\mathcal{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt.$$

1. Soit T un réel strictement positif et f un élément $\mathcal{E}$ qui est T -périodique. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si f est T -périodique, il en est de même pour f' .

Montrer que la réciproque est fausse.

3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que l'application U est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On pose $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$.

(a) Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n .

(b) Écrire la matrice de U_n dans la base $\mathcal{B}_n$.

(c) L'endomorphisme U_n est-il bijectif?

6. Soit f dans $\mathcal{E}$. Justifier que si $f \in \text{Ker}(U)$, alors

(i) $\int_0^1 f(t) dt = 0$;

(ii) f est périodique de période 1.

7. A-t-on $\text{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathcal{E} \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \wedge \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) \right\}$?

8. Donner explicitement une fonction non nulle f appartenant à $\text{Ker}(U)$, et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.

9. L'endomorphisme U est-il surjectif?

10. Soit a un réel non nul et f_a la fonction $t \mapsto e^{at}$, définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Déterminer $U(f_a)$.

(b) Dresser le tableau des variations de la fonction réelle $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$.

(c) Montrer alors que tout réel λ strictement positif, $\text{Ker}(U - \lambda \text{Id}_{\mathcal{E}}) \neq \{0\}$.