

Fiche n°1 : BIEN RÉDIGER

Exercice 1. — (minuscules) ζ : zêta, ω : oméga, η : êta, χ : khi, θ ou ϑ : thêta, σ ou ς sigma :
 — (majuscules) Ψ psi : , Γ : gamma, Λ : lambda, Θ : thêta, Φ :
 — delta minuscule : δ , gamma minuscule : γ , khi minuscule : χ , ksi minuscule : ξ
 — $\Theta\alpha\lambda\tilde{\eta}\varsigma$: Thalès, $\Pi\upsilon\vartheta\acute{\alpha}\gamma\omicron\eta\rho\alpha\varsigma$: Pythagore.

Exercice 2. $t \mapsto \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \cos(x+t+a)dx$

— t est liée par $\mapsto$ — k est liée par $\sum$ — n est un paramètre	— $\cos$ est un symbole réservé — x est liée par $\int \cdots d$ — a est un paramètre.
---	---

Exercice 3. $\{x \in \mathbb{R} / x^2 > a\}$ signifie l'ensemble des réels dont le carré est au strictement supérieur à a , c'est donc l'ensemble $] -\infty, -a[\cup]a, +\infty[$ si $a \geq 0$ et $\mathbb{R}$ sinon. Ainsi x est muet et a est un paramètre. La notation E_x sous-entend que l'ensemble E dépend du paramètre x . $E_a = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > a\}$ serait pertinent.

Exercice 4.

1. On sait que $x^2 \geq 0$ quel que soit le réel x .
2. Le raisonnement par récurrence
3. On résout l'équation dans un intervalle de $\mathbb{R}$.
4. Comme dit précédemment, un élément de $\mathbb{C}$ s'appelle un complexe.
5. Un vecteur est nul s'il a une norme égale à zéro.
6. Un polynôme, ce n'est pas une fonction polynomiale !

Exercice 5. — On sait que $\sqrt{2} \approx 1,414$.
 — Ainsi, $\ln(2) \approx 0,69$.
 — Or $x = \sqrt{2}$, donc $x^2 = 2$.

	— Soit f une application linéaire. On a alors $f(0) = 0$.
--	--

Exercice 6.

1. Soit z un nombre complexe. On dispose donc de a et b deux réels tels que $z = a + ib$.
2. Pour représenter une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, on introduit quatre réels a, b, c, d pour l'écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
3. On veut résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$. On calcule son discriminant noté Δ . On a $\Delta = -3$, donc cette équation n'a pas de solution réelle.
4. Soit n un entier naturel.

Exercice 7. 1. Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ aussi et $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$.

2. Si z est un nombre complexe non nul, alors on dispose de $r \in \mathbb{R}_+^*$ et de $t \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{it}$.
3. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$.
4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On note $f[I]$ l'image directe de I par f . Si f est continue sur I , alors $f[I]$ est un intervalle. On démontre cela en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

- Exercice 8.** 1. Pour résoudre $x^2 + 5x - 7 = 0$, on note Δ le discriminant de cette équation : on obtiendra $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-7)$, ce qui permet de trouver les solutions.
2. Posons $z = 1 + i$. On calcule alors $z^2 = \dots$ 3. On note z le complexe $1 + i, \dots$

- Exercice 9.** 1. On pose $P(X) = 1 + X + X^2$. P est un polynôme. 4. Soit P un polynôme.
2. $1 + X + X^2$ est un polynôme. 5. On pose $P(X) = 1 + X + X^2$.
3. Notons P le polynôme $1 + X + X^2$. 6. On note $f : x \mapsto x^2$. La fonction f est paire si elle est définie sur $\mathbb{R}$.

- Exercice 10.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$.

Fiche n°2 : USAGE DES QUANTIFICATEURS

- Exercice 1.** 1. On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$.
2. On sait que dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -1$ admet au moins une solution, par exemple $-i$.
3. La fonction f est paire si son domaine est symétrique par rapport à 0 et pour tout x dans son domaine, $-x$ appartient à son domaine et $f(-x) = f(x)$.
4. La fonction f est paire si $\forall x \in D_f \quad (-x \in D_f \text{ et } f(-x) = f(x))$.

- Exercice 2.** 1. Tout réel est majoré par un entier relatif.
2. Le seul réel dont la valeur absolue est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$ est zéro.
3. Dans $\mathbb{C}$, $1 + i$ admet une racine cubique.
4. On dispose d'une unique élément de E qui vérifie Pr.
5. Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils contiennent exactement les mêmes éléments.

- Exercice 3.** 1. $\exp(-1) \neq \exp(1)$.
2. $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x^2 \neq 2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) \neq 3$.
4. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \frac{1}{10}$.
5. $\exists z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) = -1$.
6. $\exists (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad (\exp(z) = \exp(z') = -1 \text{ et } z \neq z')$
7. $\exists n \in \mathbb{N} \quad 12 = 4n$
8. $\forall n \in \mathbb{N} \quad 5n \neq 12$
9. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n|5 \Rightarrow n \in \{1, 5\})$

$$10. \forall \mathcal{D} \in \Delta \forall M \in \mathcal{P} \left(A \notin \mathcal{D} \Rightarrow \exists ! \mathcal{D}' \in \Delta (A \in \mathcal{D}' \text{ et } \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset) \right).$$

- Exercice 4.**
1. Tout être humain est le père d'un être humain. Faux
 2. Il existe un être humain dont tous les êtres humains sont le père. Faux
 3. Dans toute prison il existe un gardien travaillant dans cette prison qui peut ouvrir toutes les cellules.
 4. Il y a une prison dans laquelle tous les gardiens travaillent et dans laquelle tous les gardiens peuvent ouvrir toutes les cellules.

- Exercice 5.**
- | | |
|--|---|
| 1. $\forall (x, y) \in \mathbb{F}^2 \quad x \heartsuit y$ | 6. $\exists (x, y) \in \mathbb{H} \quad (x \heartsuit y \text{ et } \neg(y \heartsuit x)).$ |
| 2. $\forall x \in \mathbb{H} \exists y \in \mathbb{H} \quad x \heartsuit y.$ | 7. $\exists (x, y) \in \mathbb{H} \quad (x \heartsuit y \text{ et } y \heartsuit x).$ |
| 3. $\forall x \in \mathbb{H} \exists y \in \mathbb{H} \quad x \heartsuit y.$ | 8. $\forall (x, y, z) \in \mathcal{H} \quad ((x \heartsuit y \text{ et } y \heartsuit z) \Rightarrow x \heartsuit z).$ |
| 4. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{G}^2 \times \mathbb{H} \left((x \heartsuit z \text{ et } y \heartsuit z) \Rightarrow \neg(x \heartsuit y) \right).$ | 9. $\forall x \in \mathbb{H} \quad ((\forall y \in \mathbb{H} \quad y \prec x) \Rightarrow (x \in \mathbb{G} \text{ et } \forall z \in \mathbb{F} (50$ |
| 5. $\exists x \in \mathbb{G} \forall y \in \mathbb{H} \quad (x \heartsuit y \Rightarrow y \in \mathbb{G})$ | 10. $\forall x \in \mathbb{H} \quad ((\forall y \in \mathbb{H} \quad y \prec x) \Rightarrow (x \in \mathbb{G} \text{ et } \forall z \in \mathbb{H} (x \heartsuit z$ |

Fiche n°3 : LES TYPES D'OBJETS

Exercice 1. les assertions vraies sont : $1 \in E$, $\{2\} \subset E$, $\emptyset \subset E$.

Exercice 2. Posons $E = \{1, \{1\}\}$ et $a = \{1\}$, alors $a \in E$, i.e. a est un élément de E , et, comme $1 \in E$, alors $a \subset E$.

Exercice 3. Par double implication

- $(\Leftarrow)$ trivial
- $(\Rightarrow)$ Supposons $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

Soit $x \in E$,

Par double implication,

★ supposons $x \in B$

Par cas,

— si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$, donc $x \in A \cap C$, donc $x \in C$

— sinon, alors $x \in (E \setminus A)$ et $x \in A \cup B$, donc $x \in (E \setminus A)$ et $x \in A \cup C$, donc $x \in C$

Ainsi $x \in B \Rightarrow x \in C$.

★ Par symétrie, on montre par un raisonnement analogue $(B \longleftrightarrow C) \quad x \in C \Rightarrow x \in B$

Donc $B = C$

D'où l'équivalence.

OU BIEN : Pour $(\Leftarrow)$

Supposons $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

Par double inclusion :

★

$$\begin{aligned}
B &= (B \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap B) \\
&= (C \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap B) \\
&\subset (C \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap (B \cup A)) \\
&\subset (C \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap (C \cup A)) \\
&\subset (C \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap C) \cup ((E \setminus A) \cap A) \\
&\subset (C \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap C) \cup \emptyset \\
&\subset \underbrace{(C \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap C)}_{=C}
\end{aligned}$$

★ Par symétrie, on montre par un raisonnement analogue $(B \longleftrightarrow C) \implies C \subset B$

Exercice 4. 1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ et $\mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.
 2. $\mathcal{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{x\}\}, \{\emptyset, \{x\}\}\}$.

Exercice 5. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ est $\{-1, 2\}$ | Les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ sont -1 et 2 .

Exercice 6. Aucune rédaction : quel est le sens de cette égalité ? qui est x ? Quel rapport avec S ?
 exemple de rédaction : On note S l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$. On a $S = \{-1, 2\}$.

Exercice 7. 1. La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto x^2)' = x \mapsto 2x$. | 4. La fonction f est croissante.
 2. La fonction $\cos$ est périodique. | 5. La suite (u_n) est croissante OU BIEN La suite u est croissante.
 3. La fonction f est croissante (sur $\mathbb{R}$). | 6. On considère la droite d'équation $y = 2x + 3$.

Exercice 8. 1. i est une constante : $i \in \mathbb{C}$ et $i^2 = -1$. | 6. Même remarque pour k
 2. i est déjà défini : il existe un complexe noté i tel que $i^2 = -1$. | 7. x ayant été introduit, $f(x)$ est un nombre. Seules les fonctions peuvent être continue : f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 3. x est lié dans la formule, donc ne doit pas être introduit au préalable : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. | 8. "être croissante" est une propriété globale, donc "être croissante en x " est un non sens.
 4. Même remarque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. | . La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
 5. Même remarque pour t

Exercice 9. $\mathbb{R}[X]^2$ signifie $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, c'est l'ensemble des couples de polynômes à coefficients réels, alors que $\mathbb{R}^2[X]$ serait l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^2$???.
 (P, Q) est un couple alors que $\mathbb{R}^2[X]$ n'est pas un produit cartésien.

Exercice 10.

1. « $\{\forall \dots\}$ » : erreur de syntaxe, donc ça n'a aucun sens. | 2. $\{x \in \mathbb{R} / e^x > 2\} =]\ln(2), +\infty[$.

Exercice 11. 1. $\{1, 2, 3, 4, 6\} = \{n \in \mathbb{N}^* / \exists k \in \mathbb{N} kn = 12\}$ | $\{n \in [0, 20] / \forall k \in \mathbb{N} (k|n \Rightarrow k \in \{1, n\})\}$
 2. $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2\}$ | 5. $\{x \mapsto \lambda e^x / \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda \exp / \lambda \in \mathbb{R}\}$
 3. $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\}$ | $= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \exists \lambda \in \mathbb{R} f = \lambda \exp\}$
 4. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} =$ | $= \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f' = f\}$

Fiche n°4 : DÉFINITIONS ET THÉORÈMES

Exercice 1. • E n'est pas introduit

- "c'est quand" n'est pas français $\leftarrow$ n'a donc aucun sens
- f est introduit par "avec" qui peut avoir le sens de il existe comme de pour tout
- f n'est que partiellement introduite

Exercice 2. • f n'est pas introduite

- x n'est pas introduit
- une fonction n'est certainement pas une égalité

Exercice 3.

Exercice 4. 1. Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f est dérivable en a si l'application $\left(\begin{array}{cc} \mathbb{R} \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{array} \right)$ admet une limite finie en a .

2. Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est croissante sur D si $\forall (x, y) \in D^2 \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est antisymétrique si $A^T = -A$.

Fiche n°5 : LES DIFFÉRENTS RAISONNEMENTS

Exercice 1. • Dans sa rédaction, la propriété $\mathcal{P}_n$ qu'il énonce ne dépend pas de n puisque n est liée par le quantificateur $\forall$.

- $\mathcal{P}_0$ est vrai n'a aucun sens : on affirme soit $\mathcal{P}_0$ soit $\neg \mathcal{P}_0$.
- $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_n$, donc pour établir $\mathcal{P}_0$, il faut établir l'intégralité de la formule!

- Exercice 2.** • une ligne ne peut pas commencer par le symbole $\iff$: remplacer toutes ses occurrences par "si et seulement si"
- x n'est pas introduit
 - les deux premières formules ne sont pas équivalentes : la première est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ alors que la seconde l'est sur $]infy, -1[\cup]0, +\infty[$.
- exemple de correction : Soit $x \in \mathbb{R}$
 $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x(x+1)) = \ln(2)$.
 i.e. si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x(x+1) = 2$ car $\ln$ est injective.
 i.e. si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x^2 + x - 2 = 0$
 i.e. si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \{-2, 1\}$
 i.e. si et seulement si $x = 1$.

Conclusion : L'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ d'inconnue x admet 1 comme unique solution réelle.

- Exercice 3.** 1. On suppose qu'on dispose de $m_0 \in M$ tel que pour tout entier naturel n si V est un voisinage de m_0 alors V n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $m \in M$.
 Par analyse/synthèse :
- Analyse : On suppose qu'on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et V un voisinage de m tel que V soit homéomorphe à $\mathbb{R}^{n_0}$.
3. Cette formule n'est une formule universelle sur les entiers naturels, c'est une formule universelle sur les éléments de M .