Complément

Une démonstration du théorème de sommation par paquets

Théorème *(sommation par paquets, cas positif)*.
Soit $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de réels **positifs**, où I est un ensemble quelconque s'écrivant comme une réunion $\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}_\lambda$ de « paquets » deux à deux disjoints (l'ensemble Λ est lui aussi quelconque, ainsi que tous les I_λ). Alors,

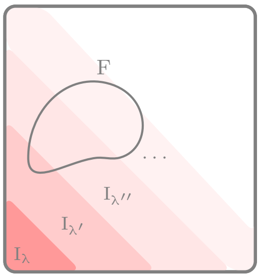
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in\mathrm{I}_\lambda} a_i\right).$$

De plus, pour que la famille $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ soit sommable, il faut et il suffit que

- pour tout $\lambda\in\Lambda$, la famille $(a_i)_{i\in\mathrm{I}_\lambda}$ soit sommable,
- la famille « de tous les paquets » $\left(\sum\limits_{i\in\mathrm{I}_\lambda} a_i\right)_{\lambda\in\Lambda}$ soit sommable.

En cas de non sommabilité, l'égalité se résume à $+\infty = +\infty$.

Preuve. (hors programme). Supposons que les deux points soient vérifiés, et posons, pour simplifier, $\mathrm{S}_\lambda = \sum\limits_{i\in\mathrm{I}_\lambda} a_i$ pour tout $\lambda\in\Lambda$. Si F est une partie finie de I, alors $\mathrm{F} = \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{F}\cap\mathrm{I}_\lambda)$. Comme F est fini, il n'y a qu'un nombre fini $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ d'éléments de Λ tels que $\mathrm{F}\cap\mathrm{I}_\lambda \neq \varnothing$ (faire un dessin aide grandement).



$$\mathrm{I} = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}_\lambda$$

Le principe des bergers [1] sur les sommes finies donne alors

$$\sum_{i\in\mathrm{F}} a_i \;=\; \sum_{k=1}^{n}\;\sum_{i\in\mathrm{F}\cap\mathrm{I}_{\lambda_k}} a_i \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{n}\mathrm{S}_{\lambda_k} \;\leqslant\; \sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{S}_\lambda$$

(la dernière somme étant finie par hypothèse). Ainsi, l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i\in\mathrm{F}} a_i$, quand F décrit toutes les parties finies de I, est majoré (par $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{S}_\lambda$), et donc $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable par définition, et $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} a_i \leqslant \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{S}_\lambda$ (principe d'une borne supérieure : c'est le plus petit des majorants).

Réciproquement, supposons que $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ soit sommable. Pour tout $\lambda\in\Lambda$, la sous-famille $(a_i)_{i\in\mathrm{I}_\lambda}$ est sommable et sa somme S_λ vérifie $\mathrm{S}_\lambda \leqslant \sum\limits_{i\in\mathrm{I}} a_i$. Soit $\mathrm{L} = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ une partie finie de Λ. Considérons alors $\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_n$ des parties finies respectivement de $\mathrm{I}_{\lambda_1}, \mathrm{I}_{\lambda_2}, \dots, \mathrm{I}_{\lambda_n}$. Puisque $\mathrm{U}_n = \mathrm{F}_1\cup\ldots\cup\mathrm{F}_n$

1. Principe qui consiste, pour compter tous les moutons, à recenser les moutons sur chaque prairie possédée par le berger, puis de sommer le tout. Souvent énoncé dans le cas où chaque prairie possède le même nombre de moutons.

est une partie finie de I et que cette réunion est disjointe, on peut écrire

$$\sum_{i\in \mathrm{F}_1} a_i + \ldots + \sum_{i\in \mathrm{F}_n} a_i = \sum_{i\in \mathrm{U}_n} a_i \leqslant \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i.$$

Puisque F_1 est une partie finie quelconque de I_{λ_1}, on peut donc dire (par définition d'une borne supérieure) que

$$\mathrm{S}_{\lambda_1} + \sum_{i\in \mathrm{F}_2} a_i + \ldots + \sum_{i\in \mathrm{F}_n} a_i \leqslant \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i.$$

De proche en proche, on obtient $\mathrm{S}_{\lambda_1} + \ldots + \mathrm{S}_{\lambda_n} \leqslant \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$. La famille de réels positifs $(\mathrm{S}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est donc sommable et $\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{S}_\lambda \leqslant \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$. ■