Complément

Espaces affines

Dans les programme actuels (2024) de CPGE, la notion d'espace affine n'est pas enseignée. Seule l'est celle de sous-espace affine d'un espace vectoriel. Ce complément vise à combler cette lacune.

Nous observons que dans un espace vectoriel un élément est distingué parmi tous les autres : le vecteur nul. Un espace vectoriel n'est pas, intuitivement, *homogène* ; ce mot trouvera explication plus loin.

Pour comprendre la définition qui va suivre il faut se souvenir que dans la Géométrie élémentaire du collège, on manipule des *points* (du plan, de l'espace) et qu'à chaque chaque couple (A, B) de points on associe un *vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Ces vecteurs peuvent, contrairement aux points, s'ajouter et être multipliés par des nombre : ils forment donc un espace vectoriel.

1 Structure affine sur un ensemble non vide

1.1 Espaces affines, sous-espaces affines

Définition 1.

On appelle *espace affine* sur un corps K tout triplet $(\mathscr{E}, (\mathrm{E}, +, \cdot), \Phi)$ où

- $\mathscr{E}$ est un ensemble non vide. Ses éléments sont appelés *points*.
- $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel, appelé *direction* de l'espace affine.
- $\Phi : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathrm{E}$ est une application qui à tout couple (A, B) de points associe un vecteur $\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, qui pourra être noté $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, cette application devant vérifier les axiomes suivants.
  (EA1) Pour tout point A de $\mathscr{E}$, l'application $\mathrm{M} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur E.
  (EA2) $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathscr{E}^3$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

De plus, si $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ est de dimension finie, l'entier $\dim(\mathrm{E})$ s'appelle la *dimension de l'espace affine* $(\mathscr{E}, (\mathrm{E}, +, \cdot), \Phi)$ et se peut se noter $\dim(\mathscr{E})$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Convention. Pour diverses raisons pratiques, il est d'usage de dire que $\varnothing$ est un espace affine, mais c'est le seul à ne pas être associé à un espace vectoriel. On. décrète souvent que sa dimension est -1.

Exemple. Si $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel, l'ensemble E possède naturellement une structure d'espace affine : $(\mathrm{E}, (\mathrm{E}, +, \cdot), \Phi)$ où $\Phi : \mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}$ est définie par $\Phi(\mathrm{AB}) = \mathrm{B} - \mathrm{A}$.

Proposition 1 .

Soit $(\mathscr{E}, (\mathrm{E}, +, \cdot), \Phi)$ un espace affine sur le corps K. Alors

1. Pour tout point A de $\mathscr{E}$, $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0_{\mathrm{E}}$.
2. Si $u \in \mathrm{E}$, et $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, il existe un unique point $\mathrm{A}' \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = u$: le point A' se note alors $\mathrm{A} + u$ ou bien $\tau_u(\mathrm{A})$

3. L'application $\tau_u : A \mapsto A + u$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$: on l'appelle *translation* de vecteur u.

Proposition 2 .
Soit $(\mathscr{E}, (E, +, \cdot), \Phi)$ un espace affine sur le corps K. Si $O \in \mathscr{E}$ est un point particulier, alors les opérations $+$ et $\cdot$ définie par

$$\forall (A, B, \lambda) \in \mathscr{E}^2 \times K, \quad A + B = A + \overrightarrow{OB} \qquad \text{et} \qquad \lambda \cdot A = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$$

définissent sur l'ensemble $\mathscr{E}$ une structure de K-espace vectoriel isomorphe à $(E, +, \cdot)$. Cet espace vectoriel se note $\mathscr{E}_O$: on dit que c'est le *vectorialisé* de $\mathscr{E}$ au point O. Son neutre est O.

Définition 2.

Soit $(\mathscr{E}, (E, +, \cdot), \Phi)$ un espace affine sur un corps K. On appelle *sous-espace affine* de $(\mathscr{E}, (E, +, \cdot), \Phi)$ toute partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ qui est ou bien vide, ou bien telle qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $(E, +, \cdot)$ de sorte que $(\mathscr{F}, (F, +, \cdot), \Phi|^{F}_{\mathscr{F}\times\mathscr{F}})$ est un espace affine.

Proposition 3 .
Soit $(E, +, \cdot)$ un K-espace vectoriel. On rappelle qu'il est naturellement muni d'une structure d'espace affine en posant $\overrightarrow{AB} = B - A$. Pour cette structure, les sous-espaces affines sont exactement, outre $\varnothing$, les parties de la forme $a + F$ avec $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

Proposition 4 .
Soit $(\mathscr{E}, (E, +, \cdot), \Phi)$ un espace affine sur un corps K. Si $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces affines, alors $\bigcap\limits_{i \in I} \mathscr{F}_i$ est un sous-espace affine.

Corollaire .
Si X est une partie quelconque d'un espace affine, il existe un plus petit sous-espace affine contenant X : c'est le sous-espace affine engendré par X. On le note Aff(X).

Exemple. Si $X = \{A, B\}$ est une paire de deux points distincts, Aff(X) se note (AB) : c'est un sous-espace affine de dimension 1 (donc une *droite affine*).

1.2 Une définition équivalente

Ce paragraphe explique qu'en substance, se donner une structure d'espace affine revient à se donner la famille de toutes les translations. On rappelle que si X est un ensemble, on note $\mathfrak{S}_X$ l'ensemble des bijections de X sur X : c'est un groupe pour $\circ$.

Théorème 1 .
Si $(\mathscr{E}, (\mathrm{E}, +, \cdot), \Phi)$ est un espace affine non vide sur un corps K, alors l'application

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{\mathscr{E}} \\ u & \longmapsto & \tau_u \end{array}$$

est un morphisme de groupes de $(\mathrm{E}, +)$ dans $(\mathfrak{S}_{\mathscr{E}}, \circ)$: on dit alors que τ est une *action du groupe* du groupe $(\mathrm{E}, +)$ sur l'ensemble $\mathscr{E}$. De plus,

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{E}^2,\ \exists! u \in \mathrm{E},\ \mathrm{B} = \tau_u(\mathrm{A}).$$

On dit que le groupe $(\mathrm{E}, +)$ *agit simplement transitivement* sur $\mathscr{E}$ par l'action τ.

Théorème 2 .
Soit $\mathscr{E}$ un ensemble non vide et $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur un corps K. La donnée d'une application $\Phi : \mathscr{E}^2 \to \mathrm{E}$ vérifiant les axiomes (EA1) et (EA2) revient exactement à se donner une action simplement transitive du groupe $(\mathrm{E}, +)$ sur l'ensemble $\mathscr{E}$.

Vocabulaire. Puisque $\mathscr{E}$ est un ensemble sur lequel agit un groupe de façon transitive, dit que $\mathscr{E}$ est un *espace homogène.*

Cette façon alternative de définir les espaces affines permet d'introduire plus généralement la notion importante suivante.

Définition 1.

Soit X un ensemble non vide et $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe. On appelle *action (à gauche)* du groupe $(\mathrm{G}, \star)$ sur l'ensemble X tout morphisme de groupes

$$\rho : (\mathrm{G}, \star) \to (\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}, \circ).$$

Si $g \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{X}$, on note $g \cdot x$ au lieu de $\rho(g)(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur ρ. On dit alors que (X, ρ) (ou abusivement X) est un G-*ensemble.*

Définition 2.

Soit (X, ρ) un G-ensemble. La relation binaire $\mathscr{R}_\rho$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathrm{X}^2, \quad \exists g \in \mathrm{G},\ y = g \cdot x$$

est une relation d'équivalence sur X. La classe d'équivalence de $x \in \mathrm{X}$ se note $\mathrm{G} \cdot x$ et est appelée *l'orbite de* x. Ainsi,

$$\mathrm{G} \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in \mathrm{G}\}.$$

S'il n'y a qu'une seule orbite, on dit que l'action ρ est *transitive* et que X est un G-*ensemble homogène.*

Exercice. Si (X, ρ) est un G-ensemble, montrer que $\{g \in \mathrm{G} \mid g \cdot x\}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}, \star)$: c'est le *stabilisateur* de x, on le note $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(x)$. Si G est un groupe fini, démontrer que $|\mathrm{G}| = |\mathrm{G} \cdot x| \times |\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(x)|$.

1.3 Applications affines

À chaque structure (groupes, espaces vectoriels, ensembles ordonnés ...) correspond une notion de morphisme (morphismes de groupe, applications linéaires, fonctions croissantes, ...). Les espaces affines n'échappent pas à la règle.

Pour ne pas alourdir les notations, un espace affine $(\mathscr{E}, (\mathrm{E}, +, \cdot), \Phi)$ sera résumé à son ensemble sous-jacent $\mathscr{E}$. L'espace vectoriel $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ se résumera à E, que l'on pourra aussi noter $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Définition .

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur le même corps. On appelle *application affine* de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ toute application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle qu'il existe une application linéaire $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{\mathscr{E}}, \overrightarrow{\mathscr{F}})$ vérifiant

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{E}^2, \quad \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})} = \mathrm{L}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}),$$

ou si l'on préfère, $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{E}^2, \quad f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + \mathrm{L}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$. L'application linéaire L est alors unique et s'appelle *la partie linéaire de* f, et se note $\overrightarrow{f}$.

Si l'on a l'âme algébrique, on aimera dire qu'une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est affine quand il existe $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ qui rende le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}^2 \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathscr{F}^2 \arrow[d, "\Phi'"] \\ \mathrm{E} \arrow[r, dashed, "\mathrm{L}"'] & \mathrm{F} \end{tikzcd}$$

où $f \times f : \mathscr{E}^2 \to \mathscr{F}^2$ est définie par $(f \times f)(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}))$.

Exemple. Si $u \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$, La translation $\tau_u : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{A} + u$ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$. Elle est même bijective.

Exercice. Si E et F sont deux K-espaces vectoriels, on sait que l'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est muni d'une structure de K-espace vectoriel. Montrer, si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des K-espaces affines, que l'ensemble $\mathscr{A}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ des applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est naturellement muni d'une structure d'espace affine. *Indication : considérer* $\mathscr{A}(\mathscr{E}, \overrightarrow{\mathscr{F}})$.

Proposition 1 .
Si E et F sont des K-espaces vectoriels munis de leurs structures affines naturelles, une application affine de E dans F est la composée d'une application linéaire de E dans F et d'une translation.

Proposition 2 *(propriétés de bases).*

1. La composée d'applications affines est une application affine.
2. Si une application affine est bijective, sa réciproque est une application affine.
3. L'image directe d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.
4. L'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.

Corollaire .
Si $\mathscr{E}$ est un espace affine, l'ensemble noté $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ des bijections affines de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$ est un groupe pour la loi $\circ$. C'est le *groupe général affine* de $\mathscr{E}$.

Exercice 1. On voit $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa structure d'espace affine naturelle.

1. Montrer que $\mathrm{GA}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. Montrer plus précisément que l'application $\Phi : (a, b) \mapsto (x \mapsto ax + b)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathrm{GA}(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la loi interne $\star$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que Φ soit un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^2, \star)$ sur $(\mathrm{GA}(\mathbb{R}), \circ)$.

L'exercice suivant généralise la question 3.

Exercice 2. Soit $\mathscr{E}$ un K-espace affine et soit E sa direction.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est en bijection avec l'ensemble $\mathrm{E} \times \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Si $f, g \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, quel élément de $\mathrm{E} \times \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ correspond à $f \circ g$?
2. En déduire une loi de groupe sur $\mathrm{E} \times \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ pour que ce dernier soit isomorphe à $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. *Muni de cette loi interne,* $\mathrm{E} \times \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *est appelé produit semi-direct du groupe* $(\mathrm{E}, +)$ *par le groupe* $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$ *: on le note* $\mathrm{E} \rtimes \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

2 Calcul barycentrique

2.1 Fonctions de Leibniz et barycentres

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps K dont la direction est notée E. On appellera *point massique* un couple (A, α) de $\mathscr{E} \times \mathrm{K}^*$. Un *système massique* est une famille $\big((\mathrm{A}_i, \alpha_i)\big)_{i \in \mathrm{I}}$, souvent finie, de points massiques.

Définition .
Soit $\mathscr{S} = \big((\mathrm{A}_i, \alpha_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système massique fini. On appelle *fonction de Leibniz* associée à $\mathscr{S}$ la fonction

$$\Lambda_{\mathscr{S}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i}. \end{array}$$

Théorème *(barycentre).*
Soit $\mathscr{S} = \big((\mathrm{A}_i, \alpha_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système massique fini. On pose $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (*masse totale* de $\mathscr{S}$). La fonction $\Lambda_{\mathscr{S}}$ est une fonction affine de $\mathscr{E}$ dans E (si l'espace vectoriel E est muni de sa structure affine naturelle), et sa partie linéaire est l'homothétie $m\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. De plus,
- si $m = 0$, alors $\Lambda_{\mathscr{S}}$ est constante.
- si $m \neq 0$, alors il existe un unique point $\mathrm{G} \in \mathscr{E}$ tel que $\Lambda_{\mathscr{S}}(\mathrm{G}) = 0_{\mathrm{E}}$.

On dit que G est le *barycentre* du système massique $\mathscr{S}$.

Si toutes les masses de $\mathscr{S}$ sont égales (c'est-à-dire si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\alpha_i = \alpha_j$) on parle plutôt *d'isobarycentre*[1].

1. Étymologies grecques — βαρύς : lourd, ἴσος : égal.

Corollaire *(réduction).*
Soit G le barycentre d'un système massique fini $\mathscr{S} = \big((\mathrm{A}_i, \alpha_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{E}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{\mathrm{MG}}.$$

Si $\mathscr{E}$ est un espace affine de dimension finie (c'est-à-dire si E est un K-espace vectoriel de dimension finie), on peut considérer une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ de E. Si O est un point arbitraire de $\mathscr{E}$ le couple $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \mathscr{B})$ s'appelle un *repère* de $\mathscr{E}$. Par définition, les coordonnées d'un point M sont celles de $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ dans la base $\mathscr{B}$. Ceci étant dit, la propriété ci-dessus montre que

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OA}_i},$$

si bien que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ sont les moyennes pondérées

$$\frac{\alpha_1 x_1(\mathrm{A}_1) + \ldots + \alpha_n x_1(\mathrm{A}_n)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}, \ldots, \frac{\alpha_1 x_d(\mathrm{A}_1) + \ldots + \alpha_n x_d(\mathrm{A}_n)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$$

où $x_k(\mathrm{A}_i)$ est la k^{e} coordonnées de A_i dans le repère $\mathscr{R}$.

2.2 Prolongé vectoriel canonique d'un espace affine

Ce paragraphe dit en substance que tout ce que l'on a raconté depuis le début ne sert à rien : un espace affine abstrait peut toujours se voir comme un sous-espace affine d'un espace vectoriel. On pourrait donc se contenter de cette dernière notion. Ces théorèmes de « plongement » de structures sont fréquents en Mathématiques. À titre d'exemples, on peut citer :

- le théorème de Cayley en théorie des groupes : tout groupe fini à n élément est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
- tout anneau intègre est isomorphe à un sous-anneau d'un corps, le « plus petit possible » contenant tous les inverses des éléments non nuls de A.
- le théorème de Whitney en géométrie différentielle : toute variété différentielle de dimension n est difféomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$.
- le théorème de Nash en géométrie riemannienne : toute variété riemannienne de dimension n est isométrique à une sous-variété de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ pour un N assez grand.

L'idée est naturelle, comme souvent : on veut associer à chaque point A un certain vecteur de façon injective, pour pouvoir « plonger » $\mathscr{E}$ dans un espace vectoriel. Si A est un point quelconque, on pense au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$. Hélas, quel point M choisir ? Puisqu'aucun ne semble être privilégié on décide de les prendre tous, c'est-à-dire de considérer l'application $f_{\mathrm{A}} : \mathrm{M} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{MA}}$: c'est une fonction de Leibniz particulière, celle associée au système massique réduit au seul point massique $(\mathrm{A}, 1)$.

Théorème 1 .
Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps K. On pose $\mathscr{E}^{\vee} = \mathrm{Vect}((f_{\mathrm{A}})_{\mathrm{A}\in\mathscr{E}})$ l'espace des fonctions de Leibniz, sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathscr{E}, \mathrm{E})$.

1. Si $f \in \mathscr{E}^{\vee}$, on a vu que f était une application affine dont la partie linéaire est une homothétie. Si on note $m(f)$ le rapport de cette homothétie alors l'application

$$m : \begin{array}{ccc} \mathscr{E}^{\vee} & \longrightarrow & \mathrm{K} \\ f & \longmapsto & m(f) \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathscr{E}^\vee$.

2. Si $\mathscr{E}$ n'est pas réduit à un point, cette forme linéaire n'est pas nulle et $\mathrm{Ker}(m)$ est un hyperplan de $\mathscr{E}^\vee$.
3. Enfin, l'application $i_{\mathscr{E}} : \mathrm{A} \mapsto f_{\mathrm{A}}$ est une bijection affine entre $\mathscr{E}$ et l'hyperplan affine $m^{-1}\langle\{1\}\rangle$ et sa partie linéaire $\overrightarrow{i}_{\mathscr{E}}$ est un isomorphisme linéaire entre E et $\mathrm{Ker}(m)$.

En somme, $\mathscr{E}$ s'identifie à l'hyperplan affine $m^{-1}\langle\{1\}\rangle$ de $\mathscr{E}^\vee$ dont la direction est $\mathrm{Ker}(m)$.

On dit que le couple $(\mathscr{E}^\vee, i_{\mathscr{E}})$ est le *prolongé vectoriel canonique* de $\mathscr{E}$. Si l'on identifie $\mathscr{E}$ avec $i_{\mathscr{E}}\langle\mathscr{E}\rangle \subset \mathscr{E}^\vee$, il est donc licite d'écrire, dans $\mathscr{E}^\vee$, des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{E}$. Par exemple,

— Si A et B sont deux points de $\mathscr{E}$, $\frac{1}{2}\mathrm{A} + \frac{1}{2}\mathrm{B}$ est le barycentre du système $((\mathrm{A},1),(\mathrm{B},1))$, autrement dit c'est le milieu du segment $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$.

— Plus généralement si $\mathscr{S} = \big((\mathrm{A}_i,\alpha_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système massique fini de masse totale non nulle m, son barycentre est $\mathrm{G} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{A}_i$.

— Si A et B sont deux points de $\mathscr{E}$, $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ n'est autre que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Exercice. Soit $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n \in \mathscr{E}$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Montrer que

— si $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, alors $\alpha_1\mathrm{A}_1 + \ldots + \alpha_n\mathrm{A}_n \in \mathscr{E}$.

— si $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0$, alors $\alpha_1\mathrm{A}_1 + \ldots + \alpha_n\mathrm{A}_n \in \mathrm{E}$.

— si $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \notin 0,1$, alors $\alpha_1\mathrm{A}_1 + \ldots + \alpha_n\mathrm{A}_n$ est un élément de $\mathscr{E}^\vee$ qui ne représente ni un point de $\mathscr{E}$, ni un vecteur de E.

Théorème 2 *(propriété universelle de $\mathscr{E}^\vee$).*
Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un corps K et $(\mathscr{E}^\vee, i_{\mathscr{E}})$ son prolongé vectoriel. Si (V, j) est un couple formé d'un K-espace vectoriel et d'une application affine injective $j : \mathscr{E} \to \mathrm{V}$, alors il existe une unique application linéaire $\varphi : \mathscr{E}^\vee \to \mathrm{V}$ telle que $\varphi \circ i_{\mathscr{E}} = j$.

Corollaire .
Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont deux K-espaces affines, et si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est une application affine, il existe une unique application linéaire $f^\vee : \mathscr{E}^\vee \to \mathscr{F}^\vee$ telle que $i_{\mathscr{F}} \circ f = f^\vee \circ i_{\mathscr{E}}$. De plus,

— $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}^\vee = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}^\vee}$.

— pour toutes applications affines f et g, $(f \circ g)^\vee = f^\vee \circ g^\vee$ si $f \circ g$ a un sens.

On dit alors que $\mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}^\vee$ est un *foncteur* de la catégorie des K-espaces affines dans celle des K-espaces vectoriels.