Complément

Développement décimal illimité propre d'un réel

Théorème .

Pour tout nombre réel $x \in [0,1[$, il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in [\![0,9]\!]$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geqslant n,\ a_k \neq 9$ (c'est-à-dire les a_n ne valent pas constamment 9 à partir d'un certain rang),
- $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

Réciproquement, toute suite de ce type définit un unique réel de $[0,1[$.

On dit alors que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le *développement décimal illimité propre* du réel x et on note comme on en a l'habitude : $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$

Remarque. La 2e condition imposée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ garantit l'unicité. En effet, le réel $x = \frac{1}{2}$ peut s'écrire

$$0,50000\ldots \quad \text{mais aussi} \quad 0,49999\ldots$$

Si vous en doutez, sommez donc une série géométrique (par exemple). On dit que la suite $(4,9,9,9,\ldots)$ est le développement décimal illimité *impropre* de $\frac{1}{2}$.

Point à bien savoir. Si $q \in \mathbb{C}$ est tel que $|q| < 1$, la série (qualifiée de géométrique) $\sum q^n$ converge absolument et pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Preuve. Faisons un raisonnement par analyse-synthèse.

$\boxed{\text{Unicité de la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$ Supposons qu'une telle suite existe. Posons $x_0 = 0$ et, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $x_\mathrm{N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n 10^{-n}$, de sorte que $a_\mathrm{N} = 10^\mathrm{N}(x_\mathrm{N} - x_{\mathrm{N}-1})$. On aura

$$10^\mathrm{N} x = \underbrace{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n 10^{-n+\mathrm{N}}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} a_n 10^{-n+\mathrm{N}}}_{=\varepsilon}.$$

Puisque $0 \leqslant a_n \leqslant 9$, on obtient, en sommant une série géométrique, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Or parmi tous les a_n quand $n \geqslant \mathrm{N}$, on est sûr d'en trouver un strictement inférieur à 9. Ceci implique que $\varepsilon < 1$ et par suite $\lfloor 10^\mathrm{N} x\rfloor = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n 10^{-n+\mathrm{N}}$. On en déduit que $10^{-\mathrm{N}}\lfloor 10^\mathrm{N} x\rfloor = x_\mathrm{N}$ et donc que l'expression de a_N ne peut nécessairement valoir que $10^\mathrm{N}(x_\mathrm{N} - x_{\mathrm{N}-1}) = \lfloor 10^\mathrm{N} x\rfloor - 10\lfloor 10^{\mathrm{N}-1}x\rfloor$.

$\boxed{\text{Existence de la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$. On aura besoin du petit résultat suivant sur les parties entières : si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$0 \leqslant \lfloor 10\lambda\rfloor - 10\lfloor\lambda\rfloor \leqslant 9 \qquad (\bigstar)$$

Ceci se se démontre en écrivant $\begin{cases} (*) & \lfloor\lambda\rfloor \leqslant \lambda < \lfloor\lambda\rfloor + 1 \\ (**) & \lfloor 10\lambda\rfloor \leqslant 10\lambda < \lfloor 10\lambda\rfloor + 1 \end{cases}$ et en faisant $-10(*) + (**)$.

Ceci étant dit, introduisons les approximations par défaut par excès de x :

$$x_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor \qquad \text{et} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes et ont pour limite x. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- $x_n - x_{n-1} = 10^{-n}(\lfloor 10^n x\rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x\rfloor)$ et la 1^{re} partie de l'encadrement (★) appliquée à $\lambda = 10^{n-1}x$ montre que cette quantité est positive : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- $y_n - y_{n-1} = x_n - x_{n-1} + \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^n} = 10^{-n}\left(\lfloor 10^n x\rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x\rfloor - 9\right)$ et la 2^{e} partie de de l'encadrement (★) montre donc que cette quantité est négative : $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- $y_n - x_n = \frac{1}{10^n}$ qui tend vers 0.

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, donc convergent. Mais $x_n \leqslant x < y_n$ car $\lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$. On a donc, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Posons alors $a_n = 10^n(x_n - x_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
— En développant : $a_n = \lfloor 10^n x\rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x\rfloor$, donc $a_n \in \mathbb{Z}$.
— La double inégalité concernant les parties entières plus haut montre que $0 \leqslant a_n \leqslant 9$.
— Ensuite, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n 10^{-n} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} (x_n - x_{n-1}) = x_{\mathrm{N}} - x_0 = x_{\mathrm{N}}$, car $x_0 = \lfloor x\rfloor = 0$ puisque $x \in [0,1[$. Ceci prouve que $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n 10^{-n} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
— Enfin, imaginons un instant que tous les a_n vaillent 9 à partir d'un certain rang n_0. On aura, pour tout $\mathrm{N} > n_0$,

$$x_{\mathrm{N}} - x_{n_0} = 9\sum_{n=n_0+1}^{\mathrm{N}} 10^{-n} = 9\times 10^{-(n_0+1)}\frac{1-10^{-(\mathrm{N}-n_0)}}{1-10^{-1}} = 10^{-n_0} - 10^{-\mathrm{N}}.$$

En faisant $\mathrm{N} \to +\infty$, il viendrait $x = x_{n_0} + 10^{-n_0} = y_{n_0}$ ce qui est impossible car $x < y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Réciproque. Toute série de la forme $\sum a_n 10^{-n}$ est absolument convergente car les a_n sont bornés (par 9), et converge donc bien vers un réel unique (sa limite). Reste à montrer que ce réel x est bien dans $[0,1[$. Qu'il soit positif est évident. Si x était égal à 1, alors on aurait $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = 1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 910^{-n}$ (série géométrique célèbre : « 0,999... » = 1), si bien que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(9-a_n)10^{-n} = 0$. Puisque $9 - a_n \geqslant 0$ pour tout n, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ serait constamment égale à 9 : largement absurde ! ■

☆ Corollaire 1 .

Tout réel positif x possède un unique développement décimal illimité propre, c'est-à-dire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n>0}$ comme dans le théorème 1 telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 10^{-n}$. On note alors $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$

Preuve. Appliquer le théorème 1 à $x - \lfloor x\rfloor \in [0,1[$ et poser $a_0 = \lfloor x\rfloor$. ■

Notation. Si $x < 0$, alors $-x$ est positif : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est son développement décimal illimité propre on notera $x = -a_0, a_1a_2a_3\ldots$.

Remarque. Si on note $\mathscr{C}$ (comme *chiffres*) l'ensemble des suites $(a_n)_{n>0}$ possédant les propriétés du théorème 1, on constate que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}\times\mathscr{C}$. Certains s'en servent comme point de départ pour une construction de $\mathbb{R}$