

Chapitre 15

DES INTÉGRALES À PARAMÈTRE

I	Intégrales à paramètre entier	2
I.1	Motivation	2
I.2	Convergence dominée de Lebesgue	2
I.3	Intégration terme à terme de Lebesgue	3
 II	 Intégrales à paramètre réel	 3
II.1	Continuité d'une intégrale à paramètre	4
II.2	Dérivation d'une intégrale à paramètre	4
II.3	Astuce de la domination locale	5
II.4	Application : la fonction Gamma d'Euler	5

- ✓ Savoir expliquer pourquoi la convergence uniforme est suffisante mais pas nécessaire pour intervertir limite et intégrale sur un segment.
- ✓ *A contrario*, savoir donner des contre-exemples de suites de fonctions cpm (f_n) convergeant uniformément sur un intervalle (nécessairement non borné) sans pour autant qu'il y ait interversion limite-intégrale.
- ✓ Connaître parfaitement les hypothèses précises des théorèmes de ce chapitre : la convergence dominée et l'intégration terme à terme sont admises, mais il faut, comme d'habitude, énoncer parfaitement leur cadre d'utilisation.
- ✓ Savoir trouver une fonction dominante. Autrement dit, savoir majorer une quantité $|f(x, t)|$ indépendamment de x . Au besoin, on peut considérer que x ne varie que sur un segment $[a, b]$.
- ♠ Trouver une fonction dominante qui dépend de n (dans le cas de la convergence dominée) ou de x (dans le cas des intégrales à paramètre).
- ♠ Se mélanger entre la variable d'intégration, notée t dans ce cours, et le paramètre, noté x ici. Bien sûr, on peut inverser toutes les notations. Notons qu'en SI, le paramètre dans la transformée de Laplace se note p (et c'est d'ailleurs un nombre complexe).
- ♠ Tenter de faire une domination sur tout segment en considérant des segments inclus dans... l'intervalle sur lequel on intègre ! C'est dans l'intervalle dans lequel évolue le paramètre qu'il faut segmenter !
- ♠ Confondre les intégrales à paramètre avec le TFCI : savoir dériver $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, si f est continue, relève d'un cours de Terminale.



Henri LEBESGUE
1875-1941

I Intégrales à paramètre entier

I.1 Motivation

On a déjà observé, au chapitre 11, que l'interversion limite-intégrale n'était pas toujours possible. Néanmoins, en cas de convergence uniforme sur un segment $[a, b]$ d'une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux, on peut écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Observation n° 1. La convergence uniforme n'est pas toujours nécessaire pour une telle interversion. En effet, si $f_n : x \mapsto x^n$, alors (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ et bien que la convergence ne soit pas uniforme, on a pourtant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Observation n° 2. Ce théorème d'interversion est inefficace lorsque on intègre sur un intervalle non borné. En effet, considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n , définie sur $[0, +\infty[$ dont la représentation est donnée ci-dessous :

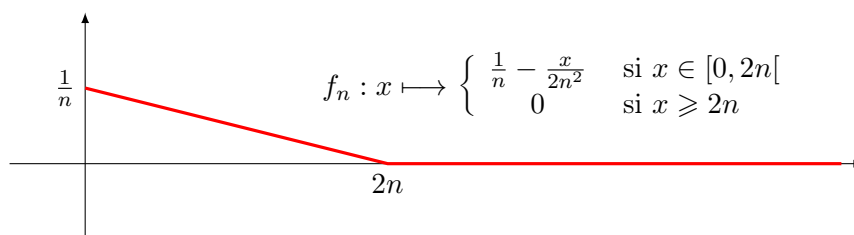


FIGURE 1 – Une convergence uniforme sans interversion limite-intégrale.

La suite (f_n) tend uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle car $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Pourtant,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \ll \frac{B \times h}{2} \gg = \frac{2n \times \frac{1}{n}}{2} = 1$$

et ne tend donc pas vers $\int_0^{+\infty} 0 dx = 0$.

Dans ce chapitre nous allons découvrir un théorème très efficace pour l'interversion limite-intégrale, qui est valable sur un intervalle quelconque, et qui ne nécessite pas de convergence uniforme.

I.2 Convergence dominée de Lebesgue

★ **Théorème** (de convergence dominée de Lebesgue) : ADMIS.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I (un intervalle de $\mathbb{R}$) vers $\mathbb{K}$. On suppose que

- la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f .
- il existe $\varphi \in \mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$.

Alors, toutes les f_n sont intégrables, ainsi que f , et on peut intervertir limite et intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

La fonction φ qui est positive, vérifie $\int_I \varphi < +\infty$ et majore toutes les f_n est appelée *une fonction dominante* de la suite (f_n) . Il est indispensable qu'elle ne dépende pas de n .

La force de ce théorème réside en ce que :

- l'intervalle I est quelconque, pas forcément un segment.
- il n'est pas nécessaire d'avoir une convergence uniforme sur I .

Exemple. Déterminer la limite de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$ quand n tend vers $+\infty$.

Cas où I est un intervalle borné. Si la suite (f_n) est **bornée**¹ sur un intervalle **borné** (par exemple $[a, b]$), alors il existe M tel que $\|f_n\|_{\infty, I} \leq M$ pour tout n : la fonction constante $\varphi : x \mapsto M$ peut jouer le rôle de la fonction dominante, car toute fonction constante est intégrable sur un intervalle borné.

I.3 Intégration terme à terme de Lebesgue

★ **Théorème** (*d'intégration terme à terme de Lebesgue*) : *ADMIS*.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K})$ (où I un intervalle de $\mathbb{R}$). On suppose que

- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S continue par morceaux sur I .
- la série numérique $\sum \|f_n\|_1$ converge, où $\|f_n\|_1 = \int_I |f_n|$.

Alors S est intégrable sur I et on peut intervertir somme et intégrale :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I S(t) dt.$$

⚠ PIÈGE !

Le théorème d'intégration terme à terme **n'est pas** le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exemple. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Astuce pour faire apparaître des $\sum$ là où il n'y en a pas : utiliser les DSE ! En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{C}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in]-1, 1[, \frac{x^{n_0}}{1-x} = \sum_{n=n_0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in]-1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

etc.

II Intégrales à paramètre réel

On appelle *intégrale à paramètre* toute fonction $F : J \rightarrow \mathbb{K}$ (où J est un intervalle de $\mathbb{R}$) définie par

$$\forall x \in J, \quad F(x) = \int_I f(x, t) dt$$

avec $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction qui est continue par morceaux par rapport à t , c'est-à-dire telle que pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x, t)$ (fonction que l'on note $f(x, \cdot)$) est continue par morceaux sur I .

Notation (rappel). Il est d'usage de noter $f(x, \cdot)$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$, pour $x \in J$ fixé.

1. À ne pas confondre avec *une suite de fonctions bornées*, ce qui voudrait dire que chaque f_n est bornée, mais que cette borne dépend de n .

II.1 Continuité d'une intégrale à paramètre

★ Théorème .

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que

- pour tout $x \in J$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I .
- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est **continue** sur J .
- il existe $\varphi \in \mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in J \times I$.

Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_I f(x, t) dt$ est continue sur J .

Principe de la preuve. Critère séquentiel + théorème de convergence dominée.

⚠ PIÈGE !

La fonction dominante φ ne doit dépendre que de t , pas de x .

II.2 Dérivation d'une intégrale à paramètre

★ Théorème (de dérivation d'une intégrale à paramètre).

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que

- pour tout $x \in J$, $f(x, \cdot)$ est dans $\mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K})$.
- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J .
- pour tout $x \in J$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I .
- il existe $\varphi \in \mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in J \times I$.

Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$\forall x \in J, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Principe de la preuve. Former le taux d'accroissement de F et appliqué le critère séquentiel à $\frac{f(x+h, y) - f(x, t)}{h}$. L'inégalité des accroissements finis permet d'utiliser le théorème de convergence dominée.

⚠ PIÈGE !

Ne pas oublier son cours de Terminale ! Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est **continue** et si $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. C'est le théorème fondamental du Calcul intégral (TFCI), qui n'a rien à voir avec les intégrales à paramètre.

☀ Corollaire (adaptation à la classe $\mathcal{C}^k$).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que

- pour tout $x \in J$, $f(x, \cdot)$ est dans $\mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K})$.
- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .
- pour tout $x \in J$ et $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ est dans $\mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K})$.
- il existe $\varphi \in \mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in J \times I$.

Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et

$$\forall x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

Remarque. L'hypothèse de domination ne porte que sur la dernière dérivée partielle.

II.3 Astuce de la domination locale

Il est souvent difficile, voire impossible, d'avoir la domination $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tous les couples $(x, t) \in J \times I$. Puisque la continuité et la dérivabilité sont des notions locales², il suffit de trouver une fonction dominante pour chaque segment $[a, b] \subset J$. Ainsi, il est courant de remplacer l'hypothèse de domination par :

- pour tous réels $a < b$ dans J , il existe une fonction $\varphi_{a,b} \in \mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $|f(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$ pour tout $(x, t) \in [a, b] \times I$.

La fonction dominante $\varphi_{a,b}$ dépend du segment $[a, b]$, mais pas de $x \in J$. On dit qu'il s'agit d'une *domination locale* ou encore d'une *domination sur tout segment*.

Exemple. Dérivée de $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$.

II.4 Application : la fonction Gamma d'Euler

On pose, pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

★ **Théorème** (*propriétés de la fonction Γ*).

Il a déjà été montré que

- Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

De plus,

- Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Remarque. La fonction Γ a des liens étroits avec la fonction ζ , notamment grâce à l'importante relation

$$\forall x > 1, \quad \zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

Remarquons au passage que pour $x = 2$, cette relation a été étudiée dans un exemple de ce cours.

2. Pour qu'une fonction soit continue/dérivable sur un intervalle J , il suffit qu'elle le soit en chaque point x de J .