

Chapitre 21

Des séries de Fourier

Pour terminer cette découverte des Mathématiques, nous vous proposons un thème abordé en cours de Physique, mais disparu des programmes de Mathématiques en 2014 : les séries de Fourier. Nous allons en particulier expliquer d'où viennent ces fameux « coefficients de Fourier ». La réponse est extraordinaire : de la Géométrie !

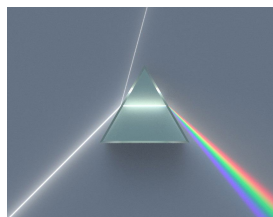
Après avoir expliqué comment Fourier a, en 1811, introduit les séries trigonométriques, nous comprendrons en quoi la Géométrie vient à notre secours pour étudier la diffusion thermique dans une tige de métal. On s'aperçoit alors que \mathbb{C} est un monde bien plus agréable, aussi est-on invité à généraliser la notion de produit scalaire à son analogue complexe : les produits hermitiens. Ces outils s'avèreront indispensables bien plus tard pour la Mécanique quantique.



Joseph FOURIER
(1768-1830)



Une barre de fer
chauffée à blanc



Un prisme décomposant
la lumière blanche

Les séries de Fourier sont un outil incontournable dans le monde de l'Industrie, pour étudier tout signal périodique, par exemple sonore. Quant aux signaux non périodiques (comme la lumière), les séries font place aux intégrales, ce qui n'est guère surprenant. Ce nouvel outil (appelé transformée de Fourier) est idéal pour le traitement d'images (filtrage, amélioration d'une image floue envoyée par un satellite lointain, etc.).

1 La motivation historique

1.1 L'équation de la chaleur

On souhaite étudier la température $T(x, y, z, t)$ au point (x, y, z) d'un milieu supposé isotrope, à l'instant t . En faisant un bilan d'énergie, les physiciens ont établi l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\lambda \Delta T = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

où λ, ρ et c sont des grandeurs physiques liées au milieu. En dimension 1 (diffusion thermique dans une tige de longueur L), cette EDP devient donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k \frac{\partial T}{\partial t}$$

où $k > 0$ est une constante. On impose aussi des conditions « initiales » :

- À $t = 0$, $T(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in [0, L]$, où f est une fonction connue.
- Aux extrémités, $T(0, t) = T(L, t) = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

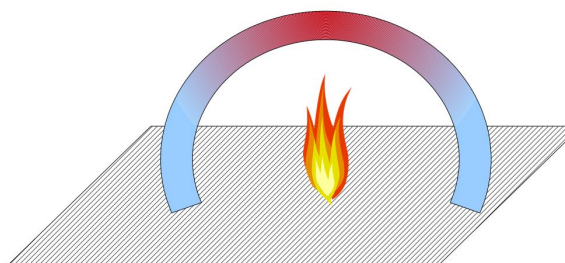


FIGURE 21.1 – Diffusion de la chaleur dans une barre chauffée, à extrémités froides.

1.2 Résolution en dimension 1

Même ainsi simplifiée, cette EDP est difficile à résoudre. Bien sûr la fonction nulle est solution, mais on en cherche d'autres ! Joseph Fourier a eu l'idée de chercher des solutions « à variables séparées » c'est-à-dire des fonctions T pouvant s'écrire

$$T(x, t) = \alpha(x)\beta(t)$$

où α et β sont des fonctions d'une variable réelle suffisamment dérivables. L'équation de la chaleur devient alors

$$\alpha''(x)\beta(t) = k\alpha(x)\beta'(t) \quad \text{ou encore} \quad \frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} = k \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}.$$

Deux fonctions, l'une dépendant de x , l'autre dépendant de t , sont égales. Elles ne peuvent être que constantes. Si cette constante était nulle, α'' serait nulle, donc α serait affine. Les conditions « initiales » imposeraient alors $\alpha = 0$, donc $T = 0$, ce que l'on ne souhaite pas. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\begin{cases} \alpha''(x) &= M\alpha(x) \\ \beta'(t) &= \frac{M}{k}\beta(t). \end{cases}$$

Pour β , c'est immédiat : $\beta'(t) = A e^{\frac{M}{k}t}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Quant α , la résolution est facile et dépend du signe de M :

- Si $M > 0$, alors $\alpha(x) = B e^{x\sqrt{M}} + C e^{-x\sqrt{M}}$ avec $B, C \in \mathbb{R}$. Ici encore, les conditions initiales imposent $B = C = 0$, ce que l'on veut éviter.
- Si $M < 0$, alors $\alpha(x) = B \cos(x\sqrt{|M|}) + C \sin(x\sqrt{|M|})$ avec $B, C \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent cette fois-ci $B = 0$, ce qui force C à ne pas être nul, puis $\sin(L\sqrt{|M|}) = 0$, donc $\sqrt{|M|} = \frac{n\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

En conclusion, une solution particulière de l'équation de la chaleur est

$$T(x, t) = \sin(n\omega x) e^{-\frac{n^2\omega^2 t}{k}}$$

où l'on a posé $\omega = \frac{\pi}{L}$. Mais Joseph Fourier a bien conscience que ce n'est qu'une solution particulière. Aussi remarque-t-il que l'EDP étudiée est linéaire homogène, ainsi, toute combinaison linéaire de fonctions de la forme ci-dessus en est encore une. Mieux encore : on peut même considérer, pour être plus général, des sommes infinies

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x) e^{-\frac{n^2\omega^2 t}{k}}$$

où $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels. La condition initiale $T(x, 0) = f(x)$ donne finalement

$$f(x) = T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

et Fourier tombe sur un nouveau problème : comment déterminer ces fameux coefficients b_n ?

1.3 Une idée géniale

En Géométrie, si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N)$ est une base orthonormée, tout vecteur \vec{u} s'écrit

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^N b_n \vec{e}_n.$$

Pour attraper les coefficients b_n , il suffit de faire un produit scalaire :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \lambda_n = \langle \vec{u} \mid \vec{e}_n \rangle.$$

Ici, nous avons une relation semblable :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x),$$

et Fourier sait bien que la famille de fonctions $(x \mapsto \sin(n\omega x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre. Ne serait-elle pas orthonormée pour un certain produit scalaire ? On calcule aisément, pour tous $n \neq p$ dans \mathbb{N}^*

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin(n\omega x) \sin(p\omega x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\cos((n-p)\omega x) - \cos((n+p)\omega x) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n-p)\omega x)}{(n-p)\omega} - \frac{\sin((n+p)\omega x)}{(n+p)\omega} \right]_0^L \\ &= 0 \text{ car } \omega = \frac{\pi}{L}. \end{aligned}$$

Et si $n = p$, $\int_0^L \sin(n\omega x) \sin(p\omega x) dx = \int_0^L \sin^2(n\omega x) dx = \int_0^L \frac{1 - \cos(2n\omega x)}{2} dx = \frac{L}{2}$.
En conclusion, le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{2}{L} \int_0^L f(x)g(x) dx$$

rend la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (où $s_n : x \mapsto \sin(n\omega x)$) orthonormale ! Les coefficients b_n finissent par tomber : il s'agit de

$$b_n = \langle f \mid s_n \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

C'est la naissance des coefficients de Fourier.

2 Espaces préhilbertiens complexes

2.1 Produit scalaire hermitien

Motivation. Nous savons définir des produits scalaires dans des \mathbb{R} -espaces vectoriels. Par exemple, si $T > 0$, les familles de fonctions T -périodiques $(x \mapsto \cos(n\omega x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(x \mapsto \sin(n\omega x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ (où $\omega = \frac{2\pi}{T}$) sont toutes deux orthonormées pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{2}{T} \int_0^T f(x)g(x)dx.$$

On aimerait disposer du même outil pour la famille $(x \mapsto e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$ qui a l'avantage de rassembler les deux familles précédentes. Or, si $n, p \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^T e^{in\omega x} e^{ip\omega x} dx = \left[\frac{e^{i(n+p)\omega x}}{(n+p)\omega} \right]_0^T = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -p \\ T & \text{si } n = -p. \end{cases}$$

On en déduit que le bon outil réside en l'application

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Définition

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. On appelle *produit scalaire complexe (ou hermitien)* toute application

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant les propriétés suivantes.

1. φ est linéaire à gauche : $\varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x', y)$.
2. φ est *semi-linéaire* à droite : $\varphi(x, y + \lambda y') = \varphi(x, y) + \bar{\lambda}\varphi(x, y')$.
3. φ est à symétrie hermitienne : $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.
4. φ est positive : $\varphi(x, x) \geq 0$.
5. φ est définie-positive : $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$.

tout cela quels que soient $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Le couple (E, φ) s'appelle alors un *espace préhilbertien complexe*. Si E est de dimension finie, on parle alors d'*espace hermitien* en l'honneur du mathématicien français Charles Hermite (1822-1901).

Comme pour leurs analogues euclidiens, les produits scalaires hermitiens se notent souvent $\langle x | y \rangle$.

Remarque. Certains préfèrent imposer aux produits hermitiens d'être semi-linéaires à gauche plutôt qu'à droite. C'est le cas notamment en Mécanique quantique. Cela ne change en rien la théorie.

★ **Théorème** (*Cauchy-Schwarz*)

Soit (E, φ) un espace préhilbertien complexe. Pour tous vecteurs x et y de E ,

$$|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{\varphi(x, x)} \sqrt{\varphi(y, y)}.$$

Il y a de plus égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Preuve. On peut supposer $y \neq 0$ sans quoi c'est évident. L'astuce de Schwarz consiste à dire que si un polynôme P réel de degré 2 est de signe constant, alors son discriminant est négatif ou nul (cf. chap. 12). Ce polynôme est défini par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) = \varphi(x + \lambda y, x + \lambda y).$$

Hélas, quand on développe P , on trouve

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \varphi(x, x) + \bar{\lambda}\varphi(x, y) + \lambda\varphi(y, x) + \lambda\bar{\lambda}\varphi(y, y) \\ &= \varphi(x, x) + \lambda\varphi(x, y) + \lambda\overline{\varphi(x, y)} + \lambda^2\varphi(y, y) \\ &= \varphi(x, x) + 2\lambda\Re(\varphi(x, y)) + \lambda^2\varphi(y, y), \end{aligned}$$

et, puisque $\deg(P) = 2$, dire que son discriminant est négatif ou nul revient à dire que $|\Re(\varphi(x, y))| \leq \sqrt{\varphi(x, x)}\sqrt{\varphi(y, y)}$: c'est bien, mais on veut plus !

L'astuce consiste alors à multiplier $\varphi(x, y)$ par $e^{i\theta}$ avec θ bien choisi pour que le produit soit réel : si on pose $\theta = -\arg(\varphi(x, y))$ (éventuellement nul dans le cas trivial où $\varphi(x, y) = 0$) on a parfaitement ce que l'on veut :

$$e^{i\theta}\varphi(x, y) = e^{i\theta} \times |\varphi(x, y)|e^{-i\theta} = |\varphi(x, y)|.$$

De plus, $e^{i\theta}\varphi(x, y) = \varphi(e^{i\theta}x, y)$: on est donc amené à poser $x' = e^{i\theta}x$ et à constater que $\varphi(x', x') = e^{i\theta}e^{i\theta}\varphi(x, x) = \varphi(x, x)$. On applique donc l'astuce de Schwarz au polynôme

$$P : \lambda \mapsto \varphi(x' + \lambda y, x' + \lambda y)$$

pour arriver à l'inégalité attendue. □

Conséquence. La fonction
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\varphi(x, x)} \end{array}$$
 est une norme sur E . L'égalité de Cauchy-Schwarz, tout comme pour le cas réel, assure l'inégalité triangulaire. C'est la *norme hermitienne* associée à φ .

Exemples de référence.

• L'espace \mathbb{C}^n est muni d'un produit hermitien canonique : si $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$ et $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ sont dans \mathbb{C}^n , on pose

$$\langle \vec{z} | \vec{w} \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}.$$

On retrouve la norme $\|\cdot\|_2$ vue au chapitre 3, qui n'est autre que la norme hermitienne canonique de \mathbb{C}^n .

• L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ des matrices complexes de format (n, p) est lui aussi muni d'un produit hermitien canonique :

$$(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^t A \times \overline{B}).$$

Notons que $\operatorname{tr}({}^t A \times \overline{B}) = \operatorname{tr}({}^t [{}^t A \times \overline{B}]) = \operatorname{tr}(\overline{B} \times A)$ qui vaut encore $\operatorname{tr}(A \times \overline{B})$ par la propriété fondamentale de la trace.

• L'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ est quant à lui muni du désormais célèbre produit hermitien

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

• Si I est un intervalle quelconque, l'ensemble $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$ des fonctions **continues** et de carré intégrable sur I est muni du produit hermitien

$$(f, g) \mapsto \int_I f(x) \overline{g(x)} dx.$$

⚠ PIÈGE !

Si on enlève l'hypothèse de continuité, on perd l'aspect défini-positif. En effet, l'égalité $\int_I |f|^2 = 0$ n'entraîne la nullité globale de f seulement si f est continue !

Néanmoins, nous verrons qu'il est indispensable de manipuler des espaces de fonctions continues par morceaux (et non continues). Il ne faudra pas perdre de vue que l'on ne dispose plus d'une norme, mais seulement d'une *semi-norme*.

Exercice. Établir les identités remarquables suivantes

$$\Re\langle x | y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2),$$

$$\Im\langle x | y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2),$$

et en déduire la formule de polarisation, permettant de décrire le produit hermitien avec la norme hermitienne uniquement :

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2.$$

2.2 Orthogonalité

Les notions de vecteurs orthogonaux, d'orthogonal d'une partie sont les mêmes dans les espaces préhilbertiens complexes. On a encore le théorème suivant.

★ **Théorème** (*supplémentaire orthogonal*)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe et F un sous-espace vectoriel de E .

1. $F \cap F^\perp = \{0_E\}$: F et F^\perp sont en somme directe.
2. Si l'on a $F \oplus F^\perp = E$, alors automatiquement $(F^\perp)^\perp = F$.
3. Si F est de dimension finie, on a toujours $F \oplus F^\perp = E$ (et donc aussi $(F^\perp)^\perp = F$).


Si $F \oplus F^\perp = E$ (en particulier si F est de dimension finie), on peut donc parler des *projections orthogonales* p_F et p_{F^\perp} . Si de plus (e_1, \dots, e_p) est une base **orthonormée** de F , alors pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{n=1}^p \langle x | e_n \rangle e_n.$$

Cette expression sera utile pour la théorie de Fourier.

2.3 Isométries et matrices unitaires

La définition est strictement la même que dans le cas réel. Nous verrons que la théorie de Fourier s'inscrit parfaitement dans le cadre des isométries.

 **Définition 1**

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle_E)$ et $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle_F)$ deux espaces préhilbertiens complexes. On appelle *isométrie vectorielle* de E dans F toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que


$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F = \|x\|_E.$$

Une telle application est nécessairement injective (mais pas toujours surjective si E est de dimension infinie).

On démontre (*via* les formules de polarisation) que cette propriété de conservation de la norme est équivalente à celle de la conservation du produit scalaire :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) | f(y) \rangle_F = \langle x | y \rangle_E.$$

L'analogie des matrices orthogonales est décrit ici.

 **Définition 2**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). On dit que M est *unitaire* quand l'endomorphisme canoniquement associé $u_M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est une isométrie (pour le produit hermitien canonique).

On note $U(n)$ l'ensemble des matrices unitaires de taille n . Le terme *unitaire* provient du fait que dans \mathbb{C}^n muni de son produit hermitien naturel, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est unitaire, c'est-à-dire $|\lambda| = 1$, alors pour tout $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\lambda \vec{z}\| = \sqrt{\langle \lambda \vec{z} | \lambda \vec{z} \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle \vec{z} | \vec{z} \rangle} = \|\vec{z}\|.$$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'endomorphisme canoniquement associé est $X \mapsto MX$ et la condition de préservation de la norme s'écrit $\|MX\| = \|X\|$: cela rappelle sans conteste la propriété ci-dessus !

 **Théorème 1** (*propriétés et caractérisation de $U(n)$*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $U(n)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.
2. Si $M \in U(n)$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$. En particulier $|\det(M)| = 1$.
3. $M \in U(n)$ si et seulement si ${}^t\overline{M}M = I_n$, ce qui signifie que les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ muni de son produit hermitien naturel.

4. $M \in U(n)$ si et seulement si $M^t \overline{M} = I_n$, ce qui signifie que les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ muni de son produit hermitien naturel.

Remarque. On définit aussi le *groupe spécial unitaire* $SU(n)$ comme étant l'ensemble des $M \in U(n)$ telles que $\det(M) = 1$. Le groupe $SU(2)$ est d'une importance fondamentale en Physique des particules.

Comme annoncé au chap. 12, le théorème spectral se généralise aux espaces hermitiens.

★ **Théorème 2** (*spectral*)

Soit M une matrice hermitienne, c'est-à-dire vérifiant $\overline{M} = M$. Alors il existe une matrice unitaire $P \in U_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. On dit que M est *unitairement diagonalisable*.

Preuve. La preuve est exactement la même que dans le cas réel. □

Remarque. La matrice diagonale D est alors à coefficients réels, autrement dit que si M est hermitienne, alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$.

En effet, si X est un vecteur propre associé à une valeur propre λ de M , alors $\langle MX | X \rangle = \langle X | X \rangle = \|X\|^2$, ce qui prouve que $\lambda = \frac{\langle MX | X \rangle}{\|X\|^2}$. Oui mais

$$\langle MX | X \rangle = {}^t(MX)\overline{X} = {}^tX {}^tM\overline{X} = {}^tX \overline{\overline{MX}} = \langle X | \overline{MX} \rangle = \langle X | MX \rangle$$

et puisque $\langle MX | X \rangle = \overline{\langle X | MX \rangle}$, cela montre que $\langle MX | X \rangle \in \mathbb{R}$, et par suite que $\lambda \in \mathbb{R}$.


3 Analyse de Fourier

3.1 L'espace $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}(\mathbb{T})$ des polynômes trigonométriques

Les fonctions \mathbb{T} -périodiques les plus simples sont de la forme

$$x \mapsto a \cos(n\omega x) \quad \text{et} \quad x \mapsto a \sin(n\omega x)$$


où $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$ et où classiquement $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (appelée *pulsation*). Aussi pense-t-on à considérer la notion suivante.

 **Définition**

Soit $N^* \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On appelle *polynôme trigonométrique* de degré au plus N , de période T , toute fonction de la forme

$$x \mapsto c_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

où $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N \in \mathbb{C}$ et $c_0 \in \mathbb{C}$. Leur ensemble se note $\mathcal{P}_N(T)$.

 **Théorème 1** (*écriture complexe condensée*)

Tout polynôme trigonométrique de degré au plus N , s'écrit

$$P : x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x}.$$

Preuve. Avec les notations de la définition précédente, en utilisant des formules d'Euler $\cos(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$ et $\sin(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$, on obtient aisément


$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (\text{si } n > 0) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \quad (\text{si } n < 0).$$

□

Remarque. On en déduit facilement les relations inverses, pour tout n dans $\llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\boxed{a_n = c_n + c_{-n}} \quad \text{et} \quad \boxed{b_n = i(c_n - c_{-n})}.$$

Il est pratique d'étendre ses relations à $n = 0$ et de poser $\boxed{a_0 = 2c_0}$ et $b_0 = 0$.

 **Corollaire**

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Si on note, pour chaque $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$, e_n la fonction $x \mapsto e^{in\omega x}$, alors

$$\mathcal{P}_N(T) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\{e_n \mid -N \leq n \leq N\}).$$

En conséquence, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_N(T) = 2N + 1$.

Preuve. La famille $(e_n)_{-N \leq n \leq N}$ est libre car elle est orthonormée pour le produit hermitien $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f \overline{g}$, comme on l'a vu en introduction.

Puisqu'elle est génératrice de $\mathcal{P}_N(T)$ d'après le théorème précédent, c'en est une base, et comme elle est de taille $2N + 1$, on en déduit la dimension de $\mathcal{P}_N(T)$. \square

Les coefficients a_n, b_n, c_n peuvent finalement s'exprimer à l'aide de P uniquement : c'est là toute l'astuce de l'introduction d'un produit scalaire dans l'espace des fonctions.

★ **Théorème 2** (*coefficients de Fourier*)

Soit $N \in \mathbb{N}$, $T > 0$ et $P \in \mathcal{P}_N(T)$.

1. Si P s'écrit $x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x}$, alors pour tout $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T P(x) e^{-in\omega x} dx.$$

2. Si P s'écrit $x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ alors pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T P(x) \cos(n\omega x) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T P(x) \sin(n\omega x) dx.$$

Preuve. Nous avons démontré à la motivation 1, page 659, que si l'on note, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n la fonction $x \mapsto e^{in\omega x}$, alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée pour le produit scalaire

$$(f_1, f_2) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f_1(x) \overline{f_2(x)} dx.$$

Le reste s'en suit : si $P = \sum c_n e_n$, alors $c_n = \langle P | e_n \rangle$. Pour démontrer 2, il suffit de se rappeler que $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ (pour $n \in \mathbb{N}$), et d'utiliser les formules d'Euler. \square

3.2 Série de Fourier d'une fonction T -périodique cpm

Sur l'espace $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions T -périodiques **continues**, l'application

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx$$

est un produit hermitien, essentiellement parce que la condition $\int_0^T |f|^2$ entraîne $f = 0$ sur $[0, T]$ et donc sur \mathbb{R} par T -périodicité.

L'idée de Fourier est de dire qu'une fonction T -périodique f ne doit pas être « trop éloignée » d'un polynôme trigonométrique $P \in \mathcal{P}_N(T)$ pour un $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Aussi pense-t-on à projeter orthogonalement f sur $\mathcal{P}_N(T)$.

☘ Définition

Soit $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On appelle *série de Fourier* de f la suite de fonctions $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ où pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x}$$

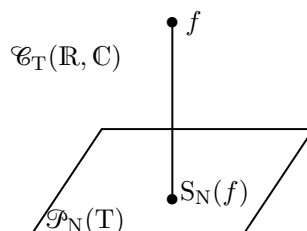
avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx$.

Remarque 1. Si on note, comme usuellement, e_n la fonction $x \mapsto e^{in\omega x}$, alors

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^N \langle f | e_k \rangle e_k.$$

C'est donc bien la **projection orthogonale** de f sur l'espace $\mathcal{P}_N(T)$ des polynômes trigonométriques de degré au plus N .

Le coefficient de Fourier c_n s'interprète alors comme la coordonnée de f sur le vecteur e_n .



Remarque 2. Il est souvent plus pratique de calculer $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx$, ce qui permet d'exploiter une éventuelle parité.

Notation et définition. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients c_n ci-dessus se notent aussi $c_n(f)$ ou encore \hat{f}_n . On dispose donc d'une application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f &\longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

où l'on a noté $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des familles de nombres complexes indexées par \mathbb{Z} . La famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ s'appelle le *spectre* de f ; on la note \hat{f} .

Exemple. On considère la fonction 2π -périodique (donc $\omega = 1$), coïncidant avec la fonction carré sur $]-\pi, \pi]$. À l'aide de deux intégrations par parties, on

calculé :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = (-1)^n \frac{2}{n^2}.$$

D'autre part, $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$.

On a représenté ci-après la fonction et son spectre.

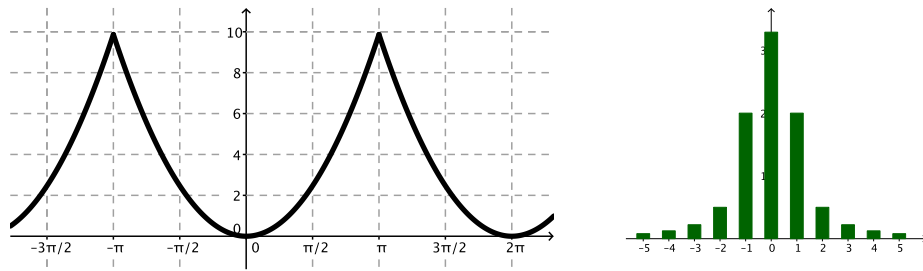


FIGURE 21.2 – Une fonction 2π -périodique et son spectre (module de c_n en ordonnée).

Extension aux fonctions continues par morceaux. Il est utile de ne pas se contenter des fonctions continues. Aussi introduit-on l'espace $\mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues par morceaux, T -périodiques définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} .

Bien sûr, l'application $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f \bar{g}$ n'est plus un produit hermitien sur $\mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ parce que $\int_0^T |f|^2 = 0$ n'entraîne plus $f = 0$ car f n'est plus forcément continue. Il est toutefois pertinent de garder cette analogie géométrique.

★ **Théorème 1** (*propriétés générales*)

1. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire de $\mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $f \in \mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, $|c_{-n}(f)| = |c_n(f)|$ (le spectre est symétrique).

3. Si f est de classe \mathcal{C}^k (avec $k \in \mathbb{N}^*$), alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad c_n(f^{(k)}) = (i\omega n)^k c_n(f).$$

Exercice. Démontrer ces propriétés calculatoires faciles.

Conséquence. Si f est de classe \mathcal{C}^k (avec $k \geq 1$), alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f^{(k)})| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)| dx$$

ce qui prouve que la famille $(c_n(f^{(k)}))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. D'après le point 3 du théorème précédent, on en déduit que $c_n(f) = O(\frac{1}{n^k})$: plus f est régulière, plus son spectre tend rapidement vers 0. Le théorème qui suit traite le cas particulier où $k = 0$, inaccessible avec les arguments précédents. Il est célèbre et a des applications en acoustique (cf. § application musicale).

★ **Théorème 2** (*Riemann-Lebesgue*)

Si $f \in \mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx = 0$$

ou si l'on préfère, $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |c_n(f)| = 0$: le spectre de f s'épuise à l'infini.

On trouvera une démonstration dans les *Mathématiques dévoilées*, du même auteur, tome MPSI page 481. L'idée consiste à démontrer ce résultat pour les fonctions constantes (ce qui est immédiat), puis les fonctions en escalier (par la relation de Chasles) et enfin d'utiliser l'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

★ **Théorème 3** (*inégalité de Bessel*)

Si $f \in \mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx.$$

En conséquence, la suite $(\sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2)_{N \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Preuve. Quand f est continue, on peut sortir les outils géométriques des espaces préhilbertiens : puisque $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur un certain sous-espace, l'inégalité de Bessel générale nous informe que

$$\|S_N(f)\| \leq \|f\|$$

où $\|\cdot\|$ est la norme hermitienne associée au produit hermitien $(f_1, f_2) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f_1 \overline{f_2}$. Or $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$, les e_n étant deux à deux orthogonaux. Le théorème de Pythagore assure quant à lui que

$$\|S_N(f)\|^2 = \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2$$

ce qui conclut puisque $\|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f|^2$. Si f est seulement continue par morceaux, on doit adapter un peu (on admet). \square

★ Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est de carré sommable.

Notation. On note $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ l'ensemble des familles de complexes de carré sommable. Ainsi, la transformée de Fourier des fonctions T-périodiques est une application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f &\longmapsto \hat{f} \end{aligned}$$

L'espace $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est lui aussi muni d'un produit hermitien :


$$(u, v) \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \overline{v_n}.$$

On démontre, comme pour le cas réel, que la somme infinie ci-dessus a bien un sens lorsque u et v sont dans $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$: on rappelle que l'astuce consiste à écrire $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, et donc que $|xy| \leq \frac{|x|^2 + |y|^2}{2}$.

En passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, on a donc montré que $\|\hat{f}\|_2 \leq \|f\|_2$: l'application $f \mapsto \hat{f}$ est donc 1-lipschitzienne. Nous verrons que l'on a beaucoup plus fort (théorème de Parseval).

3.3 Le cas réel : les coefficients a_n et b_n

Quand f , toujours supposée T-périodique et continue par morceaux, est à valeurs réelles, il est souvent plus commodes de travailler avec les versions « rééchantillonnées » des coefficients de Fourier c_n .

 **Définition**

Soit $f \in \mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose comme habituellement $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

Pour $n = 0$ on pose $a_0(f) = 2c_0(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$ et $b_0(f) = 0$.

Le lecteur est alors amené à vérifier que l'on a, comme pour les polynômes trigonométriques, les relations suivantes


$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} = \overline{c_n(f)}.$$

En particulier, $|c_n(f)|^2 = \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Le théorème qui suit est très utile en pratique (exercice facile).

 **Théorème (parité)**

Soit $f \in \mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Si f est **paire**, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$.
- Si f est **impaire**, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.

3.4 Application musicale

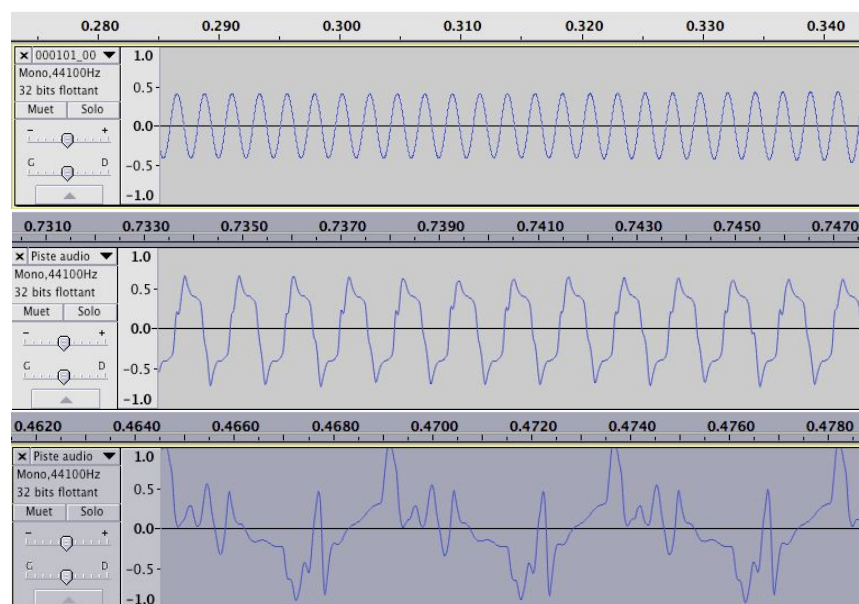
Le son est un phénomène vibratoire : un objet vibrant, par exemple une corde frottée par un archet, va déplacer les molécules d'air à sa proximité, et l'onde ainsi créée va se propager jusqu'à nos oreilles.

On peut traduire électroniquement cette vibration en un signal que l'on peut alors observer sur un oscilloscope, ou un écran d'ordinateur muni d'un logiciel acoustique. Nous avons choisi le logiciel libre AUDACITY pour enregistrer des sons respectivement émis par un diapason, une flûte à bec (en plastique) et un violoncelle.

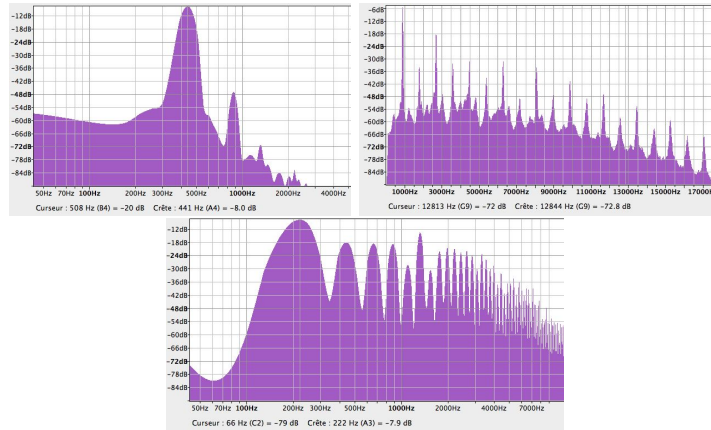


Nous avons fait jouer un La à ces trois instruments : 440 Herz, soit le La naturel, pour le diapason et la flûte, et 220 Herz (une octave plus bas) pour le violoncelle, pour que cela corresponde à sa première corde « à vide ».

Les graphiques ci-dessous représentent, après les avoir agrandis fortement, les signaux enregistrés. On constate que sur une échelle de temps très courte, le signal semble bien être périodique, et que le diapason a cette formidable propriété d'émettre une onde quasiment pure, c'est-à-dire une sinusoïde. On s'aperçoit aussi que le signal émis par le violoncelle est plus complexe.

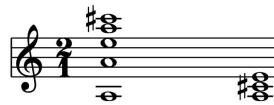


Le logiciel AUDACITY permet d'afficher le spectre, ou plus précisément $|c_n(f)|^2$ (avec $n \geq 1$), dans une échelle logarithmique adaptée (en dB). Nous pouvons alors observer les graphiques suivants.



On observe :

- que le diapason n'émet effectivement qu'une seule *harmonique* (correspondant au seul pic significatif). Celui correspond à $n = 1$, soit à la fonction $t \mapsto e^{i2\pi\nu t}$ où $\nu = 440$ Hz : c'est bien un La.
- que la flûte émet d'autres harmoniques, correspondant à $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, etc. soit aux fréquences $\nu_1 = 440$ Hz (La), $\nu_2 = 880$ Hz (La, mais plus aigu), $\nu = 3\nu_1$ (Mi), $\nu_4 = 4\nu_0$ (La, mais encore plus aigu), $\nu_5 = 5\nu_0$ (Do dièse), etc.
- que les harmoniques du violoncelle sont beaucoup plus présentes, ce qui lui confère ce timbre chaud caractéristique.
- que conformément au théorème de Riemann-Lebesgue, les harmoniques se font de plus en plus rares : $|c_n(f)|^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.



Conclusion. Les premières harmoniques d'un La, sont donc, excepté le La lui-même, un Mi et un Do#, soit respectivement la quinte et la tierce majeure. Cet accord de trois notes (fondamentale, sa tierce majeure et sa quinte) constitue l'*accord parfait majeur* (ici, de La Majeur, donc).

4 Synthèse de Fourier

La question est simple : comment retrouver le signal f si l'on connaît son spectre $\hat{f} = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$? C'est ce que fait un synthétiseur quand il reproduit

(de façon plus ou moins réussie) le son d'un instrument.

Un théorème, décliné en deux versions, répond à la question, mais un autre nous précise une information très importante : le spectre d'un signal f transporte la même *énergie* que celui-ci, dans un sens que l'on va préciser.

4.1 Les théorèmes de Dirichlet

Définition 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant en chaque point $x \in \mathbb{R}$ des limites à gauche et à droite finies, usuellement notée $f(x^-)$ et $f(x^+)$. On appelle *régularisée* de f la fonction \tilde{f} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Bien sûr, si f est continue sur \mathbb{R} , alors $\tilde{f} = f$ (mais la réciproque est fautive !). Notons qu'une fonction continue par morceaux a, par définition, des limites finies à gauche et à droite en tout point.

Définition 2

Soit $k \in \mathbb{N}$. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un segment, est dite *de classe \mathcal{C}^k par morceaux* quand il existe une subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ telle que les restrictions de f à chaque $]x_i, x_{i+1}[$ soit

- de classe \mathcal{C}^k sur $]x_i, x_{i+1}[$,
- prolongeable par continuité en une fonction de classe \mathcal{C}^k sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Pour $k = 0$, on retrouve la notion de fonction continue par morceaux.

PIÈGE !

Si une fonction est \mathcal{C}^k par morceaux (avec $k > 0$) alors elle est aussi \mathcal{C}^{k-1} par morceaux, **mais** elle peut ne pas être continue !

Le théorème central de la théorie de Fourier, dans une forme légèrement affaiblie, est le suivant.

★ **Théorème 1** (de Dirichlet, version simple)

Soit $T > 0$, et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Si f est une fonction T -périodique, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , alors la suite de fonctions $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la régularisée \tilde{f} de f . Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in\omega x}.$$

Remarque 1. Si f prend ses valeurs dans \mathbb{R} , il est d'usage d'utiliser les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$. La relation du théorème de Dirichlet s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x) \right].$$

Remarque 2. L'hypothèse « \mathcal{C}^1 par morceaux » peut-être amoindrie, mais pas totalement supprimée : on peut montrer qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge.

Preuve. • Si $N \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} e^{in\omega x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sum_{n=-N}^N e^{in\omega(x-t)} dt$$

En faisant le changement de variable $u = x - t$, et en se souvenant que pour les fonctions T -périodiques, $\int_0^T = \int_a^{a+T}$ quel que soit a ,

$$S_N(f)(x) = -\frac{1}{T} \int_x^{x-T} f(x-u) \sum_{n=-N}^N e^{in\omega u} du = \frac{1}{T} \int_0^T f(x-u) \sum_{n=-N}^N e^{in\omega u} du \quad (*)$$

En faisant ensuite le changement de variable $s = -u$, on obtient après avoir fait le changement d'indice $m = -n$ qui laisse globalement la somme invariante :

$$S_N(f)(x) = -\frac{1}{T} \int_0^{-T} f(x+s) \sum_{m=-N}^N e^{im\omega s} ds = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+u) \sum_{n=-N}^N e^{in\omega u} du \quad (**)$$

De (*) et (**) on obtient, en sommant les deux,

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D_N(u) du$$

où l'on a posé $D_N(u) = \sum_{n=-N}^N e^{in\omega u}$: c'est le célèbre *noyau de Dirichlet*.

• Nous allons calculer le noyau de Dirichlet $D_N(u)$. Pour ce faire, écrivons, si $e^{i\omega u} \neq 1$ (c'est-à-dire $u \notin T\mathbb{Z}$),

$$D_N(u) = \left(\sum_{n=0}^N e^{in\omega u} - 1 \right) + \left(\sum_{n=0}^N e^{-in\omega u} - 1 \right) + 1 = \frac{1 - e^{i(N+1)\omega u}}{1 - e^{i\omega u}} + \frac{1 - e^{-i(N+1)\omega u}}{1 - e^{-i\omega u}} - 1$$

Le lecteur est certainement habitué à l'astuce de l'arc moitié et il n'est pas surpris que l'on écrive alors

$$\begin{aligned} D_N(u) &= \frac{e^{i\frac{N+1}{2}\omega u} e^{-i\frac{N+1}{2}\omega u} - e^{i\frac{N+1}{2}\omega u}}{e^{i\frac{\omega}{2}u} - e^{-i\frac{\omega}{2}u}} + \frac{e^{-i\frac{N+1}{2}\omega u} e^{i\frac{N+1}{2}\omega u} - e^{-i\frac{N+1}{2}\omega u}}{e^{i\frac{\omega}{2}u} - e^{-i\frac{\omega}{2}u}} - 1 \\ &= e^{i\frac{N}{2}\omega u} \frac{-2i \sin(\frac{N+1}{2}u)}{-2i \sin \frac{\omega u}{2}} + e^{-i\frac{N}{2}\omega u} \frac{2i \sin(\frac{N+1}{2}u)}{2i \sin \frac{\omega u}{2}} - 1 \\ &= 2 \cos\left(\frac{N\omega u}{2}\right) \frac{\sin(\frac{N+1}{2}\omega u)}{\sin(\frac{\omega u}{2})} - 1 \end{aligned}$$

Rien ne sera épargné au lecteur qui devra se souvenir de la formule de Trigonométrie $\sin(p) \cos(q) = \frac{1}{2}(\sin(p+q) + \sin(p-q))$, pour pouvoir continuer et écrire

$$D_N(u) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\omega u) + \sin(\frac{\omega u}{2})}{\sin(\frac{\omega u}{2})} - 1 = \boxed{\frac{\sin((N + \frac{1}{2})\omega u)}{\sin(\frac{\omega u}{2})}}$$

Bien sûr, si $u \in T\mathbb{Z}$, alors $e^{i\omega u} = e^{-i\omega u} = 1$ et les sommes sont triviales à calculer : $D_N(u) = 2N + 1$.

• On constate par ailleurs que $\frac{1}{T} \int_0^T D_N(u) du = 1$. En effet, $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$ et l'on sait que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée pour le produit hermitien $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f \bar{g}$, donc

$$\frac{1}{T} \int_0^T D_N(u) du = \sum_{n=-N}^N \langle e_n | e_0 \rangle = \|e_0\|^2 = 1.$$

Cette remarque (associée au 1^{er} point) permet d'écrire, non sans astuce, que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_N(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right] D_N(u) du.$$

Si l'on pose, pour tout $u \in]0, T[$,

$$\varphi(u) = \frac{\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}}{\sin(\frac{\omega u}{2})} = \frac{f(x+u) - f(x^+) + f(x-u) - f(x^-)}{2 \sin(\frac{\omega u}{2})}$$

(et en complétant par $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$ par exemple), alors

$$S_N(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(u) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega u\right) du,$$

et là franchement on est content car on reconnaît Riemann et Lebesgue qui viennent à notre rescousse !

• Il ne reste plus qu'à montrer que φ est bien continue par morceaux sur \mathbb{R} : par T -périodicité, l'étude sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ suffira. Ailleurs qu'en 0, il n'y a pas de problème car f est continue par morceaux. En 0, on sait que $2 \sin(\frac{\omega u}{2}) \sim \omega u$. D'autre part, puisque f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux (enfin voilà l'hypothèse non encore utilisée!),

On conclut (mais on sait déjà la fin) : φ étant continue par morceaux, le théorème de Riemann-Lebesgue assure que $S_N(f)(x) - \tilde{f}(x) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$: on a bien prouvé la convergence simple de la suite de fonctions $(S_N(f))$ vers la fonction \tilde{f} . \square

Si en plus f est continue, bien sûr $\tilde{f} = f$, mais la convergence est bien plus forte qu'une convergence simple.

★ **Théorème 2** (de Dirichlet, version uniforme)

Soit $T > 0$, et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Si f est une fonction T -périodique, **continu** et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , alors la suite de fonctions $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f .

Preuve. Le théorème de Dirichlet version simple nous apprend déjà que $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $\tilde{f} = f$ sur \mathbb{R} .

Ensuite, si f est \mathcal{C}^1 par morceaux, alors $f'(x)$ existe pour tout $x \in [0, T]$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Notons Df la fonction égale à f' où elle existe et 0 sinon. Il est clair que Df ainsi définie est continue par morceaux. De plus, on a établi que $c_n(Df) = in\omega c_n(f)$. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n\omega} |c_n(Df)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2\omega^2} + |c_n(Df)|^2 \right)$$

(on a utilisé l'astuce classique « $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ » obtenue en écrivant $(|a| - |b|)^2 \geq 0$). Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente, ainsi que $\sum |c_n(Df)|^2$ (car Df est continue par morceaux, et l'inégalité de Bessel s'applique donc). On peut donc dire, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |c_n(f)e^{in\omega x}| \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{n^2\omega^2} + |c_n(Df)|^2 \right)}_{\text{indép. de } x} \times 1$$

ce qui prouve la convergence normale (donc uniforme) des séries de fonctions $\sum c_n(f)e_n$ et $\sum c_{-n}(f)e_{-n}$ sur \mathbb{R} . Au final, la suite de fonctions $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge bien uniformément vers f sur \mathbb{R} . \square

Exemple. Considérons la fonction « dents de scie » f , représentée ci-dessous, à gauche. Le lecteur peut s'amuser à remarquer que $f(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(\sin(\pi x))$.

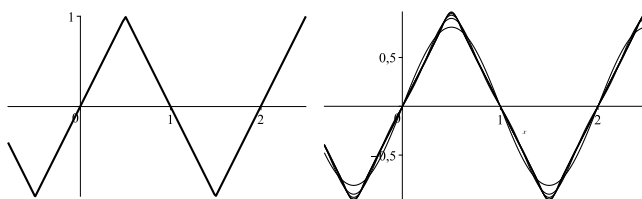


FIGURE 21.3 – Convergence uniforme de la série de Fourier.

On a représenté à droite les fonctions $S_N(f)$ pour $N \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$. On constate une convergence uniforme rapide vers f .

Exemple d'application. Reprenons la fonction de la page 667 où f est 2π -périodique et où $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. On a calculé $c_n = (-1)^n \frac{2}{n^2}$ si $n \in \mathbb{Z}^*$ et $c_0 = \frac{\pi^2}{3}$. Puisque f est réelle et paire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$b_n = 0$, $a_n = c_n + c_{-n} = (-1)^n \frac{4}{n^2}$ et $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$. Le théorème de Dirichlet s'applique et donne,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx).$$

Pour $x = \pi$, on obtient $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$, ce qui permet d'écrire la désormais célèbre égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

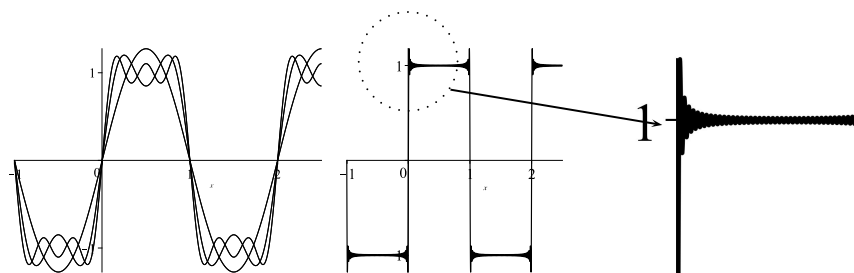
En faisant $x = 0$, on obtient une autre identité : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, établie dans les exercices du chapitre 1.

4.2 Le phénomène de Gibbs

Si la fonction est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet uniforme nous garantit la convergence uniforme de $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ vers f .

En revanche, dès que f n'est pas continue, un phénomène particulier se produit aux points de discontinuité : la convergence uniforme est mise en défaut.

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté $S_N(f)$ pour quelques valeurs de N , dont $N = 100$ (à droite), où f est une fonction « créneaux ». On constate que même pour N très grand (figure de droite), des oscillations se produisent aux voisinages des points de discontinuité, et leur amplitude ne diminue pas ! C'est le phénomène de Gibbs¹.



1. Josiah Willard GIBBS (1839-1903), physicien américain. Il démontra que les perturbations observées dans des appareils calculant des séries Fourier n'étaient pas des défaillances matérielles, mais bien un phénomène général d'origine mathématique, donc inévitable.

4.3 Conservation de l'énergie : le théorème de Parseval

Si f est un signal T -périodique (complexe), la quantité $|f(t)|^2$ s'appelle, en Physique, la densité d'énergie (souvent t est le temps, en seconde). L'énergie de f sur une période est donc

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Notons que cette quantité n'est autre que $\|f\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme hermitienne associée au produit hermitien $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f \bar{g}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal (complexe) discret (le « temps » est représenté par des entiers naturels), l'énergie de ce signal est alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2.$$

Le théorème fondamental suivant énonce que le spectre transporte exactement la même énergie que le signal d'origine.

★ **Théorème (de Parseval)**

Soit $f \in \mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $\|\hat{f}\| = \|f\|$ c'est-à-dire

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx.$$

Preuve. Cas où f est supposée continue. Puisque $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$

et que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée pour le produit scalaire complexe $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f \bar{g}$, le théorème de Pythagore assure que

$$\|S_N(f)\|^2 = \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2$$

Or $S_N(f)$ est le projeté orthogonal de f (sur $\mathcal{P}_N(\mathbb{T})$), donc $S_N(f) - f$ et f sont orthogonaux, et encore par le théorème de Pythagore :

$$\|S_N(f)\|^2 = \|S_N(f) - f + f\|^2 = \|S_N - f\|^2 + \|f\|^2.$$

Or f est ici supposée continue : le théorème de Dirichlet uniforme nous garantit donc que $\|S_N(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$. Oui mais voilà, pour toute fonction continue g sur $[0, T]$,

$$\|g\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |g|^2} \leq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|g\|_\infty^2} = \|g\|_\infty.$$

On en déduit donc que $\|S_N(f) - f\|^2 \leq \|S_N(f) - f\|_\infty^2$ et par théorème des gendarmes, $\|S_N(f) - f\| \rightarrow 0$. Finalement, $\|S_N(f)\| \rightarrow \|f\|$ c'est-à-dire $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2$.

Cas général. Il faut adapter un peu (on admet). □

Ce résultat dit donc en substance que lorsque l'on fait $N \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité de Bessel, on obtient une égalité! Dans le cas réel, on utilise les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$, et l'égalité de Parseval s'écrit

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)^2 dx.$$

En effet, on a déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_{-n}|^2 = |c_n|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4}$, et comme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, on a l'expression donnée ci-dessus.

Remarque. Si l'on se restreint à l'espace $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui est, contrairement à $\mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, muni d'une structure préhilbertienne complexe, le théorème de Parseval énonce que la transformée de Fourier

$$f \mapsto \hat{f} = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une **isométrie** de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

★ Corollaire (*unicité des coefficients de Fourier*)

Soit f et g des fonctions T -périodiques et **continues**. Si f et g ont même spectre, alors $f = g$.

Preuve. Comme toute isométrie, la transformée de Fourier $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est injective. Si f et g ont même spectre, c'est que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par linéarité, on a donc $c_n(f - g) = 0$, et par injectivité, $f - g = 0$. □

Remarque 1. Si f et g ne sont pas continues, cela est faux, puisque la relation $\|f\| = 0$ n'entraîne plus $f = 0$ dans l'espace $\mathcal{C}_T^{\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Remarque 2. On montre que la transformée de Fourier n'est pas surjective de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Exemple d'application. Reprenons encore une fois la fonction de la page 667 où f est 2π -périodique et où $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. On a vu que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 0$, $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$ et $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$. Le théorème de Parseval s'applique et donne

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \quad \text{c.-à-d.} \quad \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4} = \frac{\pi^4}{5},$$

ce qui donne immédiatement la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.