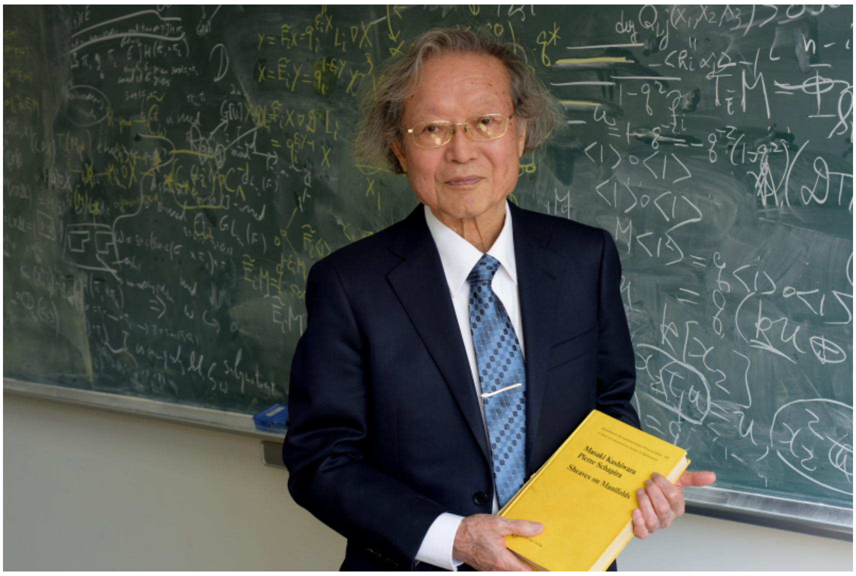
Exercices de Mathématiques

2025-2026

Classe de Mathématiques Spéciales

P. S. I.



Masaki KASHIWARA
(1947 -)

ABEL
PRISEN

Masaki KASHIWARA est un mathématicien japonais. Dans sa thèse de doctorat, il fonde, à 23 ans, la théorie des D-modules, objets abstraits qui peuvent servir à généraliser la notion de système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Il retrouve le cas particulier obtenu au XIX$^{\text{e}}$ siècle par le théorème de Cauchy-Kowalewskaya et met en évidence une équivalence entre la catégorie des D-modules et celles des faisceaux constructibles. Les faisceaux, disons d'anneaux, se rencontrent de façon naturelle et assez rapidement : si on note $\mathscr{T}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les parties ouvertes de $\mathbb{R}$ (comprenant donc les intervalles $]a,b[$), alors la famille $(\mathscr{C}(\mathrm{U},\mathbb{R}))_{\mathrm{U}\in\mathscr{T}(\mathbb{R})}$ constituée de tous les ensembles de fonctions continues est un faisceau d'anneaux sur $\mathbb{R}$.

Une des idées géniales de Kashiwara a été d'introduire la notion de base cristalline, objet essentiellement combinatoire, qui inspira de nombreux mathématiciens au début des années 2000. Parce que formalisant les équations aux dérivées partielles, ses travaux ont des conséquences en physique mathématique, où l'intégrale de chemin, dite de Feynman, n'est toujours pas construite mathématiquement.

Le prix Abel, l'une des plus haute distinction en mathématiques, lui est discerné en mars 2025, récompensant ses contributions fondamentales à l'analyse géométrique et à la théorie des représentations, en particulier le développement de la théorie et la découverte des bases cristallines.

V. ROHART
www.vrohart.e-monsite.com
vincentrohart@hotmail.com

Περὶ παντός, ὦ παῖ, μία ἀρχὴ τοῖς μέλλουσι καλῶς βουλεύεσθαι ·
εἰδέναι δεῖ περὶ οὗ ἂν ᾖ ἡ βουλή, ἢ παντὸς ἁμαρτάνειν ἀνάγκη.

Πλατῶν

`[Péri pantoss, ô pai, mia ark`^{h}`ê toïs mélloussi kalôs bouleuest`^{h}`aï :`
`eïdénaï deï hou ann ê hê boulê, ê pantoss hamartaneïn anankê].`

En toute chose, mon enfant, il n'y a qu'un commencement pour ceux qui s'apprêtent à bien délibérer :
c'est de savoir de quoi on délibère, sans quoi on se trompe nécessairement sur tout.

Platon (428-348 av. J.-C.), *Phèdre* [237 c]

Martin Kuppe, *Mathematisten* (2014)

Table des matières

Des fonctions vectorielles et des équations différentielles linéaires

1

- ✓ Savoir définir la continuité et la dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.
- ✓ Avoir compris le rôle des fonctions composantes pour traduire la continuité ou la dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.
- ✓ Savoir dériver $\gamma \circ \lambda$, $t \mapsto \lambda(t) \cdot x$, $\mathrm{L} \circ \gamma$ (avec L linéaire), $\mathrm{B}(\gamma_1, \gamma_2)$ (avec B bilinéaire). En particulier, savoir dériver sans hésiter $t \mapsto \langle \gamma_1(t), \gamma_2(t) \rangle$ et $t \mapsto \gamma_1(t) \wedge \gamma_2(t)$.
- ✓ Avoir compris ce que cache le symbole $\int_{\mathscr{C}^+} \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ représentant une circulation sur une « courbe orientée » $\mathscr{C}^+$.
- ✓ Savoir reconnaître une équation différentielle qui n'est pas linéaire.
- ✓ Maîtriser le théorème central : celui de Cauchy-Lipschitz dans sa version linéaire. Avoir compris qu'il donne la dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène associée.
- ✓ Savoir parfaitement résoudre une EDL1 quelconque ou une EDL2 à coefficients constants.
- ✓ Savoir mettre en place une technique de variation de la constante pour une EDL1 (pour les EDL2, rien n'est exigible).

- ♠ Oublier l'orientation sur une courbe sur laquelle on veut calculer une circulation : le signe en dépend !
- ♠ Faire une variation de la constante pour des EDL homogènes : ce n'est pas du tout l'objet de cette technique.
- ♠ Faire une variation de la constante pour des EDL à coefficients constants. C'est totalement inutile car on peut trouver une solution particulière constante !
- ♠ Essayer d'écrire l'équation caractéristique d'une EDL scalaire quand celle-ci n'est pas à coefficients constants : à quoi peut bien ressembler les racines ? Ce serait des fonctions ?

1.1 Fonctions vectorielles

Exercice 1 *(théorème du moment cinétique).* Si M est un point mobile de masse constante m et si A est un point fixe, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \left(m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{d}t}\right)$ est appelé *moment cinétique*[1] *de* M *par rapport au point* A.

1. Montrer que l'application $\overrightarrow{\mathrm{L}}$ ainsi définie est un *torseur*, c'est-à-dire vérifie la relation dite de *Varignon* (aussi appelée *règle de Babar* par les petits rigolos) :
$$\forall \mathrm{A},\ \forall \mathrm{B}, \quad \overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{R}},$$
où $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ est un vecteur indépendant de A et B que l'on précisera.
2. Établir le théorème du moment cinétique : la dérivée (par rapport au temps) du moment cinétique de M par rapport à A vaut $\sum \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}}$.

Exercice 2

1. Soit $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\vartheta(0) = 0$. On pose
$$\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta(t) & -\sin\vartheta(t) \\ \sin\vartheta(t) & \cos\vartheta(t) \end{pmatrix}$$
pour tout réel t. Calculer $\mathrm{M}'(0)$.
2. Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathrm{M} : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que $\mathrm{M}(0) = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{M}(t)^{\intercal} \times \mathrm{M}(t) = \mathrm{I}_n$ pour tout réel t. Montrer que $\mathrm{M}'(0)$ est une matrice antisymétrique.

1. En anglais on parle de *angular momentum* c'est-à-dire « moment angulaire ».

Exercice 3 Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$. On pose

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

1. Soit A et B dans $\mathbb{R}^n$. Calculer $\mathrm{L}(\gamma)$ si $\gamma = t \mapsto (1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}$ ($t \in [0, 1]$).
2. Si $\mathrm{R}, p > 0$, déterminer $\mathrm{L}(\gamma)$ quand $\gamma = t \mapsto (\mathrm{R}\cos(\omega t), \mathrm{R}\sin(\omega t), pt)$ ($t \in [0, \tau]$). Que retrouve-t-on si $p = 0$ et $\tau = 2\pi$?
3. Soit $\mathrm{R} > 0$. Calculer $\mathrm{L}(\gamma)$ quand $\gamma = t \mapsto (\mathrm{R}\cos^3(t), \mathrm{R}\sin^3(t))$ ($t \in [0, 2\pi]$).

Au vu des premières questions, il semblerait que $\mathrm{L}(\gamma)$ *s'interprète comme la longueur du support de* γ.

1.2 Calcul de circulations

Exercice 4 L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. Soit $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ le champ de vecteurs qui à tout point $\mathrm{M}(x, y, z)$ associe le vecteur de coordonnées $(xy, 0, x)$. Soit aussi les points $\mathrm{A}(3, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 3, 0)$ et $\mathrm{C}(0, 0, 6)$. Calculer la circulation de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ le long du triangle ABC (avec l'orientation $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C}$).

Exercice 5 Si $\mathrm{R} > 0$, on considère le cercle $\mathscr{C}_\mathrm{R}^+$ de centre O de rayon R, parcouru une seule fois dans le sens direct. Soit alors le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{\mathrm{OM}^2}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad \left(\text{noté } \frac{\overrightarrow{r}}{r^2} \text{ ou } \frac{\overrightarrow{e_r}}{r} \text{ en Physique}\right).$$

Calculer $\displaystyle\oint_{\mathscr{C}_\mathrm{R}^+} \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$. Même question avec le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{G}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{\mathrm{OM}^2}(-y_\mathrm{M}\overrightarrow{e_x} + x_\mathrm{M}\overrightarrow{e_y})$.

1.3 Équations différentielles

Exercice 6 Parmi les équations fonctionnelles suivantes, lesquelles sont des équations différentielles ? Parmi celles-ci, lesquelles sont linéaires (on distinguera les homogènes) ?

1. $y'(t) = \cos(t)y(t) + \sin(t)$.	2. $y'(t) = \cos(y(t)) + \sin(t)$.	3. $y'(t) = y^{-1}(t)$.
4. $y''(t) + ty'(t) + t^2y(t) = 0$.	5. $y''(t) + y'(t) + y(t)^2 = 0$.	6. $y'(t) = y''(t)$.
7. $y'(t) = \frac{1}{y(t)}$.	8. $y'(t) = \frac{1}{t}y(t)$.	9. $y'(t) = y(\frac{1}{t})$.

Exercice 7 On considère l'équation différentielle bien connue $y'(t) = y(t)$, mais où cette fois l'inconnue est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et expliquer en quoi cela ne contredit pas le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Exercice 8 Résoudre $y''' + y'' - 6y' = 0$.

Exercice 9 Résoudre $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x$.

Exercice 10 Résoudre grâce à la méthode de variation de la constante :

$$x(1 + x^2)y'(x) - (x^2 - 1)y(x) = -2x.$$

Exercice 11 Résoudre $x^2y''(x) + 4xy'(x) - (x^2 - 2)y(x) = 0$ où l'inconnue est définie sur $]0, +\infty[$.
Indication : on pourra considérer la fonction $x \mapsto x^2y(x)$.

Exercice 12 *(une équation différentielle non linéaire).* Une étude sur le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à modéliser l'évolution de la population par une fonction $\mathrm{N} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$(\mathrm{E}) : \mathrm{N}' = 2\mathrm{N} - 0{,}0045\mathrm{N}^2.$$

Si $t \geqslant 0$ est le temps (en heures), la partie entière de $\mathrm{N}(t)$ est le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t et on donne $\mathrm{N}(0) = 1\,000$.

1. On suppose que N ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que N est solution de (E) si et seulement si $\frac{1}{\mathrm{N}}$ est solution d'une équation différentielle linéaire (E′).
2. Résoudre (E′) puis (E) et déterminer la fonction N de l'énoncé.
3. Étudier les variations de N.
4. Déterminer l'instant t_0 où la population aura diminué de moitié.

Exercice 13 *(CCINP).* On considère l'équation différentielle non normalisée suivante :

$$(\mathrm{E}) : |x|y'(x) + y(x) = x^3,$$

où y est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E) sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier (problème de raccordement des solutions).

Exercice 14 *(CCINP).* Trouver toutes les fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x - 1 + g(x) \qquad \wedge \qquad \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = x - 1 + f(x)\right].$$

Exercice 15 *(CCINP).* On souhaite résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & \cos(t)x(t) - \sin(t)y(t), \\ y'(t) & = & \sin(t)x(t) + \cos(t)y(t). \end{array}\right.$ Si (x, y) est un couple de solutions, montrer que $x + \mathrm{i}y$ vérifie une équation différentielle que l'on résoudra. En déduire toutes les solutions de ce système.

Exercice 16 *(CCINP).* Soit le système différentiel linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y+z, \\ y' & = & x-y+z, \\ z' & = & x+y-z, \end{array}\right. \quad \text{avec les conditions initiales} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 3, \\ y(0) & = & 1, \\ z(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

1. On suppose qu'il existe une solution, c'est-à-dire trois fonctions x, y, z dérivables vérifiant ce système. Montrer que les points M_t de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ (quand t décrit $\mathbb{R}$) appartiennent tous à un même plan P dont on donnera une équation.
2. Trouver x, y et z.

Exercice 17 *(CCINP).* On souhaite résoudre l'équation fonctionnelle

$$(\mathrm{E}) \ : \ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right),$$

où l'inconnue f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Si f est solution, montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie une certaine EDL2 (E′).
2. Chercher les complexes α tels que $t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (E′), puis résoudre (E).

Exercice 18 *(classique).* On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est *additive*, c'est-à-dire telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Soit a un réel. Montrer que l'application linéaire $x \mapsto ax$ est additive.
2. Réciproquement, considérons une fonction additive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.
3. En déduire toutes les fonctions dérivables $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x+y) = g(x)g(y)$ pour tous réels x et y.
4. On ne suppose plus f dérivable.

(a) Démontrer que $f(0) = 0$, puis qu'il existe un réel a telle que $f(n) = an$ pour tout entier n. Montrer alors que $f(x) = ax$ pour tout x dans $\mathbb{Q}$.

(b) Si maintenant f est supposée continue, démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$, c'est-à-dire que f est linéaire.

(c) $(*)$ On voit $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et on admet que $\mathbb{Q}$, qui en est un sous-espace vectoriel, admet un supplémentaire I. Construire une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive, mais pas linéaire.

Exercice 19 *(Centrale, extrait).* Soit f une solution non identiquement nulle d'une EDL2 homogène. Montrer que les zéros de f sont isolés, c'est-à-dire si t_0 est tel que $f(t_0) = 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.

Exercice 20 *(Centrale).* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et 1-périodique. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \ x''(t) + f(t)x(t) = 0$$

1. Rappeler pourquoi on peut affirmer l'existence deux solutions u et v de (E) qui ne soient pas proportionnelles. On pose alors, pour tout réel t,

$$\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} u(t) & u'(t) \\ v(t) & v'(t) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer qu'il existe A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}(t+1) = \mathrm{A} \times \mathrm{M}(t)$ pour tout réel t.
3. Si $w(t)$ désigne $\det \mathrm{M}(t)$, établir que w est une fonction constante, et en déduire $\det \mathrm{A}$.

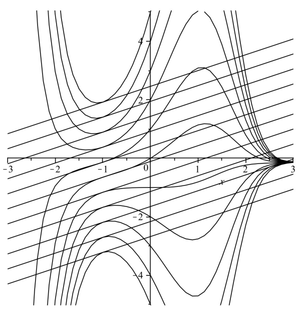
Exercice 21 $(*)$ On se propose de mettre en évidence une propriété géométrique des courbes intégrales d'une EDL1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit (E) l'équation différentielle

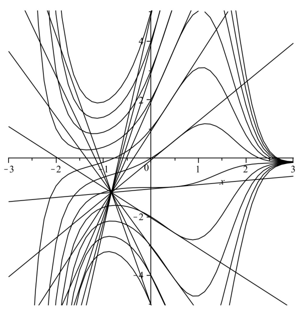
$$(\mathrm{E}) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

où les fonctions a, b et c sont continues de I dans $\mathbb{R}$, a ne s'annulant pas. Soit aussi x_0 dans I.

Montrer que les tangentes aux courbes intégrales aux points d'abscisse x_0 sont ou bien concourantes ou bien toutes parallèles.

Sur les graphiques ci-dessous on a représenté des courbes intégrales de l'équation différentielle $y'(x) = (1 - x^2)y(x) + \cos(x)$. *On constate que les tangentes en* $x_0 = -1$ *sont toutes parallèles alors que celles en* $x_0 = 0.5$*, par exemple, sont concourantes.*





De l'Algèbre linéaire (partie 1) 2

- ✓ Savoir montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel.
- ✓ Savoir montrer que des sous-espaces sont en somme directe.
- ✓ Savoir montrer qu'une famille de vecteurs est libre, liée, génératrice.
- ✓ Savoir montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire. Savoir déterminer son noyau, son image (par exemple en en donnant une base).
- ✓ Savoir expliciter la matrice d'une application linéaire dans des bases.
- ✓ Savoir expliquer comment est définie la trace d'un endomorphisme en dimension finie.
- ✓ Maîtriser tout ce qui concerne les changements de bases : $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$, $\mathrm{M} = \mathrm{PM}'\mathrm{P}^{-1}$, etc.

- ♠ Croire que trois sous-espaces $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3$ sont en somme directe si et seulement si leurs intersections 2 à 2 sont réduites à $\{0\}$.
- ♠ Confondre « être en somme directe » avec « être supplémentaires ».
- ♠ Écrire « on a $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$ » pour dire « E et F sont en somme directe » : cela a autant de sens que d'écrire « on a $1 + 2$ ». L'écriture correcte est « $\mathrm{E} + \mathrm{F} = \mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$ ».
- ♠ Vérifier que $f(0) = 0$ pour montrer que f est linéaire : c'est automatique, nul besoin de le vérifier ! En revanche, si $f(0) \neq 0$, on peut en conclure que f n'est pas linéaire.
- ♠ Croire que la dimension d'un produit de sous-espaces est le produit des dimensions d'iceux. Bien que tentante, cette formule est fausse (penser à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

2.1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 Le sous-ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Et pour $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$?

Exercice 2
1. Dans $\mathbb{R}^3$, si a, b, c sont des réels non tous nuls, prouver que l'équation $ax+by+cz = 0$ ne peut jamais représenter une droite. Et si $a = b = c = 0$?
2. Que représente l'équation $y = 2x$ dans $\mathbb{R}^3$? Et l'équation $x^2 + y^2 = 0$?

Exercice 3 Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - z + 3t & = & 0, \\ x - y + z + t & = & 0. \end{array}\right.$ Faire de même pour celui d'équation $x + y - z + 2t = 0$.

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \cup \mathrm{G}$. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ ou $\mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, distinct de $\{0_{\mathrm{E}}\}$ et de E. Montrer que $(\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}) \cup \{0_{\mathrm{E}}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6 Soit G, F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. A-t-on toujours $\mathrm{G} \cap (\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2) = (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}_1) + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}_2)$?

Exercice 7 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{Z}_1 = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et on note P_1 l'ensemble des fonctions affines.
1. Montrer que Z_1 et P_1 sont des sous-espaces vectoriels de E et que $\mathrm{E} = \mathrm{Z}_1 \oplus \mathrm{P}_1$.
2. Si $f \in \mathrm{E}$, interpréter graphiquement la projection de f sur P_1.

Exercice 8 Dans l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on note C l'ensemble des fonctions constantes, F_+ celui des fonctions nulles sur $\mathbb{R}_+$ et F_- celui des fonctions nulles sur $\mathbb{R}_-$. Montrer que $\mathrm{C}, \mathrm{F}_+, \mathrm{F}_-$ sont des sous-espaces vectoriels de E et que $\mathrm{E} = \mathrm{C} \oplus \mathrm{F}_+ \oplus \mathrm{F}_-$.

Exercice 9 *(Centrale-Supélec, 2022, extrait).* Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E (pas forcément de dimension finie). Si F admet deux supplémentaires G_1 et G_2, démontrer que G_1 et G_2 sont isomorphes.

Remarque. Ainsi, si F *admet un supplémentaire de dimension finie p, tous ses autres supplémentaires sont aussi de dimension p. On dit que p est la codimension de* F*, on la note* codim(F)*.*

Exercice 10 *(Commutant d'un endomorphisme nilpotent, CCINP).* Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie n, et u dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que u est nilpotent d'indice n, c'est-à-dire $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe x dans E tel que $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base, notée $\mathscr{B}_x$ de E.
2. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_x$.
3. On note Γ_u l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u.
   (a) Montrer que Γ_u est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
   (b) Montrer que $\Gamma_u = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$ et que $\dim \Gamma_u = n$.

2.2 Familles libres, génératrices

Exercice 11 Expliquer pourquoi l'ensemble $\mathbb{R}$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. C'est cette structure qu'on utilise dans cet exercice.

1. Montrer que $(1, \sqrt{2})$ est une famille libre. Et pour $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$?
2. On note $p_1, p_2, \ldots$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre. Qu'en déduire sur la dimension de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

Exercice 12 Dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille $(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est libre.

Exercice 13
1. Soit $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés tous distincts. Montrer que cette famille est libre.
2. Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, montrer que $(\mathrm{X}^2, \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}, \mathrm{X}^2 + 1)$ est libre, bien que constituée de polynômes de même de degré. Est-ce une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$?
3. Soit n un entier naturel. Si $(\mathrm{P}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, pourquoi existe-t-il i dans I tel que $\deg(\mathrm{P}_i) = n$?
4. Soit a dans $\mathbb{K}$. Montrer que $((\mathrm{X} - a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et donner les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

Exercice 14 *(Ultra classique).* Ici, I désigne un intervalle de longueur non nulle. Pour tout complexe a on note $f_a : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$ pour tout réel x. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre. *Indication : utiliser la dérivation et une récurrence.*

Exercice 15 *(Centrale-Supélec, extrait).* Pour tout réel a on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = |x-a|$ pour tout réel x. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre. *Indication : où n'est pas dérivable f_a ?*

2.3 Applications linéaires, noyau et image

Exercice 16 Donner une base du noyau et de l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 *(matrice antidiagonale).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Grâce aux endomorphismes associés, calculer A^2 si A est la matrice suivante.

$$\begin{bmatrix} 0 & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 18 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$ des sev de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} + \dim \mathrm{H} > 2n$. Démontrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \cap \mathrm{H} \neq \{0\}$. *Indication : considérer $f(x, y, z) \mapsto (x - z, y - z)$.*

Exercice 19 *(E3A).* Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout f dans E, on considère la fonction $\mathrm{T}(f)$ définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0, 1], \quad \mathrm{T}(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Si $f \in \mathrm{E}$, justifier que $\mathrm{T}(f)$ est dérivable et calculer $\mathrm{T}(f)'$.
3. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, que vaut $\mathrm{T}(f')$?
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{T})$.

Exercice 20 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soit f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 21 *(Centrale-Supélec 2022).* Soit E un espace vectoriel de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{V} \setminus \{0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}\} \subset \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Démontrer que $\dim \mathrm{V} \leqslant \dim \mathrm{E}$.

Exercice 22 *(D'après Arts & Métiers).* Soit n un entier au moins égal à 2. On note Ψ l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\Psi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\Psi \circ \Psi$ est une combinaison linéaire de Ψ et de $\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$. En déduire Ψ^{-1}.

Exercice 23 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f''. \end{array}$

Montrer que Φ est un endomorphisme surjectif. Est-il pour autant injectif ?

Exercice 24 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_\mathrm{E}\}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathrm{E}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
3. On suppose ici que $\dim(\mathrm{E}) < \infty$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 25 *(matrices magiques).* Une matrice carrée M est dite *magique* quand on obtient la même valeur en sommant une ligne quelconque, une colonne quelconque et une diagonale quelconque. On note alors $s(\mathrm{M})$ cette valeur commune.

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}_3$ des matrices magiques 3×3 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que s est une forme linéaire sur $\mathscr{C}_3$.
2. Montrer que $\mathscr{C}_3 = \mathrm{Ker}(s) \oplus \mathrm{Vect}_\mathbb{R}(\mathrm{J})$ où J est la matrice ne contenant que des 1.
3. Prouver que $\mathrm{Ker}(s) = (\mathrm{Ker}(s) \cap \mathscr{S}_3(\mathbb{R})) \oplus (\mathscr{C}_3 \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R}))$ et en déduire une base de $\mathscr{C}_3$ composée de matrices symétriques ou antisymétriques.

Exercice 26 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et r dans $[\![0, n]\!]$. L'ensemble des matrices de rang r est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$? Et celui des matrices de rang inférieur ou égal à r ?

Exercice 27 *(noyaux itérés, décomposition de Fitting, Centrale-Supélec).* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, et soit f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour tout entier k, on pose

$$\mathrm{N}_k = \mathrm{Ker}(f^k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_k = \mathrm{Im}(f^k).$$

1. Montrer que $(\mathrm{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion, et que $(\mathrm{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
2. Justifier que $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{N}_k$ et $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E, stables par f : on les note respectivement $\mathscr{N}$ et $\mathscr{C}$. *On dit que $\mathscr{N}$ est le* nilespace *de f et que $\mathscr{C}$ en est le* cœur.
3. Déterminer $\mathscr{N}$ et $\mathscr{C}$ lorsque $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.
4. Maintenant, E est supposé être de dimension finie non nulle n.
   (a) Justifier l'existence d'un entier k tel que $\mathrm{N}_k = \mathrm{N}_{k+1}$: on note r le plus petit d'entre eux. Montrer alors que pour tout $k \geqslant r$, $\mathrm{N}_k = \mathrm{N}_r$.
   (b) Prouver alors que pour tout $k \geqslant r$, $\mathrm{I}_k = \mathrm{I}_r$.
   (c) Montrer que $\mathscr{N} \oplus \mathscr{C} = \mathrm{E}$ (décomposition de Fitting).
   (d) Établir l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{array}\right)$ avec A nilpotente et B inversible.

2.4 Matrices et applications linéaires

Exercice 28 *(endomorphismes cycliques).* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, non nulle. Un endomorphisme u de E est dit *cyclique* s'il existe un vecteur x de E telle que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Un tel vecteur est qualifié de *totalisateur* pour u.

Montrer que u est un endomorphisme cyclique de E si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & \text{\huge 0} & a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ \text{\huge 0} & & & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des scalaires.

Exercice 29 Soit D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

1. Donner sa matrice dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$.
2. Donner sa matrice dans la base de Hilbert $(1, \mathrm{X}, \frac{1}{2}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1), \frac{1}{6}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2))$.
3. Si M est une matrice représentant D dans une base quelconque. Que vaut M^4 ?

Exercice 30 *(matrices nilpotentes).*

1. Soit M nilpotente. Justifier l'existence d'un unique entier r tel que $\mathrm{M}^r = 0$ et $\mathrm{M}^{r-1} \neq 0$. Cet entier s'appelle *l'indice de nilpotence de* M.
2. Puisque $\mathrm{M}^{r-1} \neq 0$, il existe une colonne X telle que $\mathrm{M}^{r-1}\mathrm{X} \neq 0$. Montrer alors que la famille $(\mathrm{X}, \mathrm{MX}, \ldots, \mathrm{M}^{r-1}\mathrm{X})$ est libre et en déduire que $r \leqslant n$.
3. Démontrer que toute matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle est nilpotente.
4. Donner un exemple de matrice 2×2 nilpotente mais pas triangulaire.
5. Soit M dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M}) = 0$. Montrer que M est nilpotente.

6. Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente.
7. Soit M et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, nilpotentes. On suppose que $\mathrm{MN} = \mathrm{NM}$. Montrer que $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ est nilpotente.

Exercice 31 *(Mines-Ponts).* Soit n un entier au moins égal à 2 et F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenant toutes les matrices nilpotentes. Démontrer que F contient au moins une matrices inversible.

Exercice 32 On note D l'endomorphisme de dérivation de l'espace $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on note F l'espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\cos, \sin)$. Montrer que F est stable par D, puis déterminer la matrice de l'endomorphisme induit par D sur F dans la base $(\cos, \sin)$.

Exercice 33 *(Centrale-Supélec, extrait).* Si D est une matrice diagonale, démontrer que

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{D}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{D}^2).$$

En déduire que $\mathrm{Im}(\mathrm{D}) = \mathrm{Im}(\mathrm{D}^2)$.

Exercice 34 *(matrices qui commutent).*

1. Soit D une matrice diagonale dont tous les coefficients sont deux à deux distincts. Soit M une matrice carrée commutant avec D (c'est-à-dire $\mathrm{MD} = \mathrm{DM}$). Montrer que M est diagonale.
2. Soit M une matrice carrée commutant avec *toutes* les matrices carrées de même format. Montrer que M est proportionnelle à la matrice identité.

Exercice 35 *(Ultra classique).* Soit n un entier naturel non nul et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$ si et seulement si $\mathrm{A} = \mathrm{CL}$ avec C une matrice colonne et L une matrice ligne toutes deux non nulles.
2. En déduire qu'il existe un scalaire λ tel que $\mathrm{A}^2 = \lambda\mathrm{A}$ et préciser la valeur de λ.

Exercice 36

1. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, rappeler pourquoi on peut le voir comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que l'application $\mathrm{J} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $\mathrm{J}(x) = ix$ est $\mathbb{R}$-linéaire et vérifie $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?
2. Réciproquement, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $\mathrm{J} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Construire une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur E. En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$ est pair.

Exercice 37 *(produit de Kronecker, Centrale-Supélec, écrits 2025).* Soit n, p, q et r des entiers naturels non nuls. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit la matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ de $\mathscr{M}_{nq,pr}(\mathbb{K})$ comme étant

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}\mathrm{B} & \dots & a_{1,n}\mathrm{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\mathrm{B} & \dots & a_{n,n}\mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
2. Que vaut $\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}$ si X et Y sont deux matrices-colonnes ? Et si ce sont des matrices diagonales ?
3. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, comparer $\mathrm{A} \otimes \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{A}$.
4. Montrer que $\otimes$ est une application bilinéaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{nq,pr}(\mathbb{K})$.
5. Démontrer que $(\mathrm{AA}') \otimes (\mathrm{BB}') = (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}')(\mathrm{B} \otimes \mathrm{B}')$ si $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{B}, \mathrm{B}'$ sont des matrices de formats compatibles.
6. En déduire que si P et Q sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{P} \otimes \mathrm{Q}$ est inversible, et donner son inverse.
7. Application. On dit qu'une matrice est *diagonalisable* quand elle est carrée et semblable à une matrice diagonale. Si A et B sont diagonalisables, démontrer que $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ aussi.

Exercice 38 *(le corps gauche quaternions).* On pose (en l'honneur de Hamilton),

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} : (u, v) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mais que ce n'est pas un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Donner $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$.
2. On pose $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$,

$$\mathrm{A} \in \mathbb{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{JAJ}^{-1} = \overline{\mathrm{A}}.$$

3. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par $\times$, contient I_2, et que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.

   Dans la suite, si $a \in \mathbb{R}$, on notera a en lieu et place de $a\mathrm{I}_2$.

4. Montrer que l'ensemble $\{a + b\mathrm{J} : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, que l'on notera $\mathrm{C_J}$, est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ stable par $\times$ et que c'est un anneau isomorphe à $\mathbb{C}$ (i.e. il existe une application linéaire bijective $f : \mathbb{C} \to \mathrm{C_J}$ telle que $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $f(ab) = f(a)f(b)$ et $f(1) = \mathrm{I}_2$).

   Remarque. L'ensemble $\mathbb{H}$ est donc presque un corps : la multiplication n'étant pas commutative, on dit que $\mathbb{H}$ est un corps gauche *(*skew field *en anglais). Le corps gauche des quaternions sert en infographie pour transcrire efficacement des rotations dans l'espace exactement comme les nombres complexes transcrivent les rotations du plan. La question 4 permet de voir $\mathbb{H}$ comme une extension de $\mathbb{C}$. La liste des ensembles de nombres s'agrandit donc :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}.$$

   Notons que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ sont des anneaux mais pas des corps, et que $\mathbb{N}$ n'est pas un anneau.

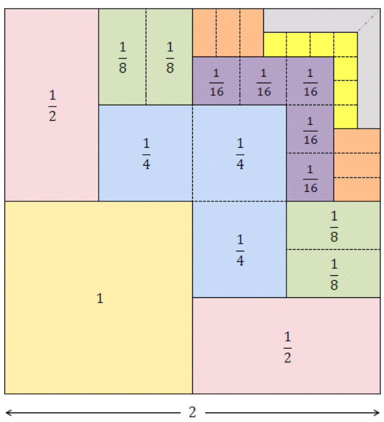
3 Des séries numériques

- ✓ Connaître le vocabulaire de base : série, sommes partielles, sommes, reste, divergence grossière, etc.
- ✓ Maîtriser les suites/séries géométriques : condition de convergence, valeur des sommes partielles et de leur limite.
- ✓ Maîtriser les séries de Riemann, en particulier la célèbre série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge.
- ✓ Utiliser des équivalents pour trouver la nature (CV ou DV) de séries à termes positifs (STP).
- ✓ Savoir mettre en place une comparaison série-intégrale pour non seulement trouver la nature de séries, mais aussi pour trouver des équivalents simples des sommes partielles (si DV) ou des restes (si CV).
- ✓ Savoir utiliser la comparaison aux séries de Riemann, aussi appelée « règle du $\times n^\alpha$ » : si $\sum u_n$ est une série complexe telle que $(n^\alpha u_n)$ est bornée (par exemple si elle tend vers 0) et que $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ CVA.
- ✓ Avoir compris ce qu'est une série absolument convergente, et qu'il n'est pas évident qu'une telle série converge (c'est un théorème !).
- ✓ Avoir compris que le produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est une troisième série $\sum c_n$, où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Connaître une condition suffisante pour que $\sum c_n$ converge, et connaître sa somme.
- ✓ Maîtriser le théorème spécial des séries alternées, et ne pas se contenter du résultat de convergence : les précisions sur le reste $\mathrm{R_N}$ sont très utiles en pratique.
- ✓ Savoir utiliser la règle de D'Alembert à bon escient.
- ✓ Connaître la formule de Stirling donnant un équivalent de $n!$ (prononcer « factorielle n »).

- ♠ Confondre $\sum a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
- ♠ Confondre $\sum\limits_{k=0}^{2n} a_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{2k}$.
- ♠ Se tromper sur l'expression du reste $\mathrm{R_N}$. C'est $\sum\limits_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty}$ et non $\sum\limits_{k=\mathrm{N}}^{\infty}$.
- ♠ Croire que le fait que $u_n \to 0$ entraîne la convergence de $\sum u_n$: la série harmonique est le contre-exemple incontournable.
- ♠ Séparer des sommes infinies en deux $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$: c'est faux en général.
- ♠ Oublier $q \neq 1$ avant d'écrire $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- ♠ Oublier $|q| < 1$ avant d'écrire $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.
- ♠ Utiliser les équivalents sur des séries qui ne sont pas à termes positifs : on peut tout à fait avoir $u_n \sim v_n$ avec $\sum u_n$ convergente et $\sum v_n$ divergente.
- ♠ Penser que la convergence de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ suffit à faire converger leur produit de Cauchy $\sum c_n$: c'est faux (cf. exercices).
- ♠ Oublier de vérifier que $a_n > 0$ à partir d'un certain rang avant d'appliquer la règle de D'Alembert.
- ♠ Appliquer la règle de D'Alembert à une série géométrique : c'est un cercle vicieux, car on démontre cette règle grâce aux séries géométriques !
- ♠ Ne pas connaître ses équivalents usuels : $\ln(1+x)$, $\mathrm{e}^x - 1$, $\cos(x) - 1$ et $\mathrm{C^{ie}}$. Fatal !

3.1 Exercices de base

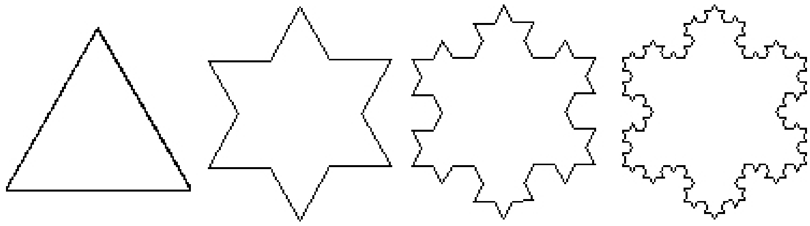
Exercice 1 *(une preuve sans mots).* Observer le dessin suivant.



Quelle série représente ce dessin ? Que semble valoir sa somme ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 Proposer une « preuve sans mots » de l'égalité $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 *(le flocon de von Koch).* $\mathscr{F}_0$ est un triangle équilatéral de côté 1. Pour chaque entier n, on construit par récurrence une ligne brisée $\mathscr{F}_n$ de la façon suivante :



1. Montrer que la longueur de $\mathscr{F}_n$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que l'aire contenue dans $\mathscr{F}_n$ tend vers une limite finie.

Exercice 4 Donner la nature des séries proposées.

$$\sum \frac{n+2025}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum \left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right], \quad \sum \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{n^n}, \quad \sum \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\,, \quad \sum \frac{n!}{n^{\alpha n}}\ (\alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum \frac{\cos(n)}{n^2}, \quad \sum \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right), \quad \sum \ln(n)^{-\ln(n)}, \quad \sum \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(x)}{1+x}\mathrm{d}x,$$

$$\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}, \quad \sum (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}), \quad \sum (1-\mathrm{e}^{1/n}), \quad \sum \frac{n^n}{\mathrm{e}^n \cdot n!}, \quad \sum \frac{n^\alpha \ln^n(n)}{n!}\ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 5 Grâce à un développement limité à un ordre suffisant, établir la convergence de $\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$. Expliquer pourquoi un simple équivalent ne peut justifier ce résultat.

Exercice 6 *(CCINP).* Étudier, grâce au lien suite-série, la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\ .$$

Exercice 7 Établir que $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Exercice 8 On admet que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer les valeurs de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 9 *(CCINP).* Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-8)^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

Exercice 10 (*autour du produit de Cauchy).*

1. Expliquer pourquoi la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente. Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle-même est une série divergente.
2. Soit q et r distincts dans $\mathbb{C}^*$ tels que $|q| < 1$ et $|r| < 1$. Expliciter le produit de Cauchy de $\sum q^n$ par $\sum r^n$. Et si $q = r$?
3. Grâce à un produit de Cauchy, déterminer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$.

Exercice 11 (*règle de Cauchy).* Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. Si $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite $\ell < 1$, montrer que $\sum u_n$ converge.
2. Si $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite $\ell > 1$, montrer que $\sum u_n$ diverge.
3. Montrer que si $\ell = 1$ on ne peut rien dire.

3.2 Les grands classiques

Exercice 12 *(Mines-Ponts).*

1. Convergence et somme de $\sum \frac{n^3}{n!}$. *Indication :* $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}(\mathrm{X}-1), \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2))$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
2. Plus généralement, pour tout entier p, montrer que la somme de $\sum \frac{n^p}{n!}$ est un multiple de e.

Exercice 13 (*la constante d'Euler*). On pose $\mathrm{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour chaque n dans $\mathbb{N}^*$.

1. Grâce au lien suite-série, prouver que $\mathrm{H}_n - \ln(n)$ tend vers une limite finie, notée γ. *À ce jour, on ne sait toujours pas si* $\gamma \in \mathbb{Q}$ *ou non.* On a donc montré que $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
2. En encadrant $x \mapsto \frac{1}{x}$ un peu mieux que par des rectangles, prouver que $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$. *On montre plus précisément que* $\gamma \approx 0.577$ *à* 10^{-3} *près.*
3. Déduire de 1 la limite de $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ quand $n \to +\infty$.
4. *(CCINP)* Discuter selon les valeurs de $a > 0$ la nature de $\sum a^{\mathrm{H}_n}$.

Exercice 14 (*précision sur les séries de Riemann*). Soit α un réel.

1. Si $\alpha \in]0,1[$, montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
2. Si $\alpha > 1$, montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Exercice 15 *(précision sur la série harmonique).*

1. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $a_n \sim b_n$ et que $\sum a_n$ converge. Montrer que les restes de ces deux séries sont équivalents.
2. Application : montrer que $\boxed{\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

Indication : on se servira de l'exercice précédent, après avoir posé $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n) - \gamma$ *et* $v_n = u_n - u_{n-1}$.

Exercice 16 (*série harmonique alternée*).

1. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, mais pas absolument.
2. *Méthode 1.* En remarquant que $\frac{1}{k+1} = \int\limits_0^1 x^k \, \mathrm{d}x$, déterminer la somme de la série étudiée.
3. *Méthode 2.* Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 0, et retrouver la somme de la série étudiée.
4. *Méthode 3.* Pour chaque n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que $\mathrm{S}_{2n} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$, et retrouver encore une fois la somme de cette série.

Exercice 17 *(séries de Bertrand).* On appelle *série de Bertrand*, toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$, où α et β sont deux réels.

1. Montrer que si $\alpha < 0$, la série est grossièrement divergente.
2. On suppose $\alpha \in [0,1[$. Trouver k dans $]0,1[$ tel que $n^k \times \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \to +\infty$. En déduire que la série de Bertrand diverge.
3. Si $\alpha > 1$, monter que la série de Bertrand converge (imiter la question précédente).
4. Si $\alpha = 1$, conclure grâce à une comparaison série-intégrale.

Exercice 18 *(règle de Raabe-Duhamel).* On cherche à améliorer la règle de D'Alembert dans le cas douteux, c'est-à-dire dans le cas où $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où α est un réel. On notera que l'on a bien $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$.

1. On suppose que $\alpha > 1$ et on considère un réel β de $]1, \alpha[$. On pose alors $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Démontrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang.
   (b) En déduire que $\sum a_n$ converge.
2. Si $\alpha < 1$, montrer que $\sum a_n$ diverge.
3. Application : donner la nature de la série $\sum \left(\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right)$.
4. En s'aidant des séries de Bertrand (exercice précédent), montrer que tout peut arriver quand $\alpha = 1$ (cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel).

Exercice 19 *(transformation d'Abel).* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.
On pose, pour tout entier n, $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que l'on peut écrire, pour tout entier non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k = [a_n \mathrm{U}_n - a_0 \mathrm{U}_0] - \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \mathrm{U}_{k-1}.$$

   On notera l'analogie avec une intégration par parties. On suppose maintenant que
   - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0,
   - $\sum u_n$ est une série de complexes bornée.
2. Montrer que $\sum a_n u_n$ est une série convergente. Retrouver le théorème spécial des séries alternées.
3. Montrer que les séries $\sum \frac{\mathrm{e}^{\,in\vartheta}}{n}$ et $\sum \frac{\cos(n)}{n \ln(n)}$ sont convergentes (où $\vartheta \not\equiv 0\ [2\pi]$).

3.3 Exercices plus techniques

Exercice 20 *(Centrale-Supélec).* Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où, pour tout entier non nul n,

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré,} \\ (-1)^n/n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indication : considérer une série convergente $\sum v_n$ telle que $\sum(u_n + v_n)$ soit une STP intéressante.

Exercice 21 *(École Polytechnique).* Nature et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)}$.

L. Euler
(1707-1783)

A. L. Cauchy
(1789-1857)

N. Abel
(1802-1829)

J. Bertrand
(1822-1900)

B. Riemann
(1826-1846)

H. von Koch
(1870-1924)

Du Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$ 4

✓ Avoir compris que le Calcul différentiel se fait raisonnablement sur des ouverts.

✓ Savoir calculer des dérivées partielles, y compris dans les cas où la fonction est définie « par morceaux » (dans ce cas, on revient au taux d'accroissement).

✓ Savoir expliquer ce qu'est la différentielle d'une fonction (de classe $\mathscr{C}^1$) en un point.

✓ Connaître le lien fondamental qui unie $\mathrm{d}f(a)$ et $\nabla f(a)$.

✓ Savoir donner le développement limité à l'ordre 1 ou 2 d'une fonction en un point. Savoir l'exprimer grâce à la différentielle, les dérivées partielles ou le gradient de la fonction.

✓ Savoir interpréter géométriquement le gradient grâce aux lignes de niveau.

✓ Savoir donner une équation de la droite tangente à une courbe implicite régulière ou du plan tangent à une surface implicite régulière.

✓ Savoir énoncer les conditions d'ordre 1 pour rechercher les extrémums d'une fonction.

✓ Savoir résoudre des EDP par changement de variables.

♠ Si f est une fonction définie « par morceaux » par $f(x,y) = \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$, et $f(x,0) = 0$, une erreur fréquente, lorsque l'on veut calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est de calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pour $y \neq 0$ et de passer à la limite $y \to 0$. Vous sous-entendez alors que f est de classe $\mathscr{C}^1$, ce qui peut ne pas être le cas ! La seule méthode : repasser par des taux d'accroissement.

♠ Confondre $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}f(a)\cdot h$ (certes, les physiciens notent ces trois objets de la même façon : $\mathrm{d}f$).

♠ Croire que $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est continue c'est dire que f est continue par rapport à x et par rapport à y.

♠ Croire que l'existence des dérivées partielles de f entraîne la continuité de f.

♠ Ne pas se placer sur un ouvert pour utiliser la condition du 1er ordre lors de la recherche des extrémums locaux.

♠ Croire que la condition du 1er ordre ($\nabla f(a) = \vec{0}$) est suffisante pour avoir un extremum.

♠ Oublier l'hypothèse (suffisante) « de classe $\mathscr{C}^2$ » avant d'appliquer le théorème de Schwarz, ou croire que ce théorème est une évidence.

4.1 Exercices de base

Exercice 1 *(dérivée d'une composée).* Un point mobile $t \mapsto \mathrm{M}(t)$ décrit la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace dont un paramétrage est $\begin{cases} x(t) = r\cos(\omega t), \\ y(t) = r\sin(\omega t), \\ z(t) = pt. \end{cases}$

1. Interpréter graphiquement les paramètres ω, r et p et esquisser un tracé de $\mathscr{C}$.
2. On suppose $\mathscr{C}$ plongée dans un champ électrique dérivant d'un potentiel électrique V. Exprimer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{V}(\mathrm{M}(t))$ en fonction des dérivées partielles de V.

Exercice 2

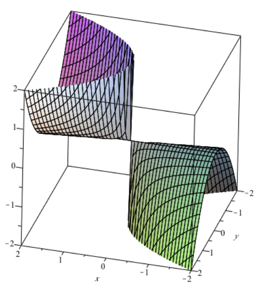
1. Soit $f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ complétée par $f(0,0) = 0$. Montrer que f est continue par rapport à x et par rapport à y mais n'est pas continue en $(0,0)$.
2. La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 3 *(une fonction désagréable).* On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = y$.

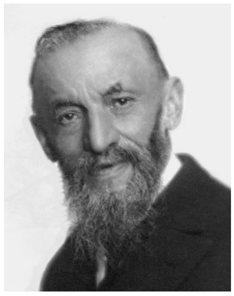
1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Montrer mieux : quel que soit le vecteur h de $\mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto f(th)$ est dérivable en 0.
3. Prouver cependant que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4 *(l'exemple de Peano).* On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

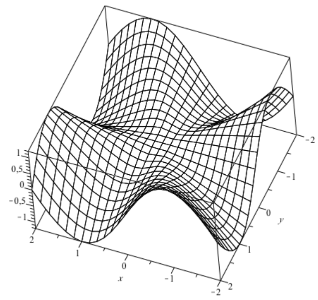
Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales. Qu'en déduire sur f ?



La surface d'équation $z = \frac{y^2}{x}$.



Guiseppe Peano (1858-1932)



La surface d'équation $z = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Exercice 5 *(différentielle d'une norme euclidienne).* On note N la fonction qui à tout $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associe $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

1. Si $a \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, montrer que N est de classe $\mathscr{C}^1$ en a et déterminer $\mathrm{dN}(a)$ par deux méthodes : 1) avec les dérivées partielles, 2) avec une approximation affine.
2. Montrer que N n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice 6 *(extrémum local).* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1. Trouver les points critiques de f.
2. Parmi eux on trouvera $a = (1, 2)$. Montrer que a n'est pas un extremum local de f grâce à un développement limité à l'ordre 2.

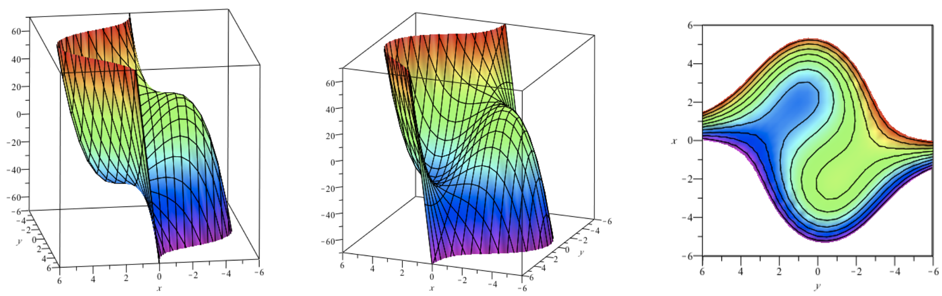


Figure 1 – Différents points de vue de $\mathscr{S} : z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Exercice 7 Soit $f : (x, y) \mapsto y^2 - x^2y + x^2$ définie sur $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leqslant y \leqslant x^2 + 1\}$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathring{\mathrm{D}} = \mathrm{D} \setminus \partial\mathrm{D}$.
2. Déterminer les extrema de f sur $\partial\mathrm{D}$ puis sur D.

4.2 Les grands classiques

Exercice 8 *(différentielle du déterminant).* On identifie $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^4$, en identifiant la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec le 4-uplet (a, b, c, d).

1. Calculer les dérivées partielles premières de $\det : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
2. En déduire la différentielle de det en I_2 est tr.
3. $(*)$ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie de même $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\det_{\mathrm{M}} = \mathrm{Com}(\mathrm{M})$ (la comatrice de M a pour terme de place (i, j) : $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(\mathrm{M})$). En déduire que $\mathrm{d}(\det)(\mathrm{I}_n) = \mathrm{tr}$.

Exercice 9 *(fonctions homogènes et théorème d'Euler).* On considère un ouvert $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}$, $\forall t > 0$, $tx \in \mathrm{D}$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ est *homogène de degré* α quand

$$\forall x \in \mathrm{D},\ \forall t > 0, \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

1. Montrer que $f : (x,y) \mapsto x\ln(\frac{x}{y})$ est homogène et donner son degré.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que si f est homogène de degré α alors la *relation d'Euler* est vérifiée :
$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \alpha f(x).$$
Écrire cette relation en fonction du gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ de f.
3. Réciproquement ? On fixe x dans D et on pose $\varphi(t) = f(tx)$ pour tout $t > 0$.
   (a) Calculer $\varphi'(t)$ pour tout $t > 0$.
   (b) On suppose que la relation d'Euler est vérifiée : en l'écrivant en tx pour tout $t > 0$ et $x \in \mathrm{D}$, donner une équation différentielle portant sur φ et conclure.

Exercice 10 *(une EDP 1).* On cherche à résoudre $2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$ où f est une fonction inconnue de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Effectuer le changement de variables affine $\Phi(x,y) = (\mathrm{X},\mathrm{Y})$ avec $\mathrm{X} = ax+by$, $\mathrm{Y} = cx+dy$ (où $ad-bc \neq 0$) et réécrire l'EDP dans le nouveau système de coordonnées (X,Y).
2. Trouver des coefficients adaptés pour que cette nouvelle EDP soit simple à résoudre, et en déduire les solutions du problème initial.

Exercice 11 Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dit *connexe par arcs* quand tous points de U peuvent être reliés par un arcs de classe $\mathscr{C}^1$ tracé dans U : $\forall (a,b) \in \mathrm{U}^2,\ \exists \gamma \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathrm{U}),\ (\gamma(0) = a \wedge \gamma(1) = b)$.

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ sur U.

1. Si U est un ouvert connexe par arcs, démontrer que f est constante sur U.
2. Soit $\mathrm{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$ où D est la droite d'équation $y = 0$. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et proposer une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, non constante, telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
3. Soit $\mathrm{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}_+$ où D_+ est la demi-droite $\mathbb{R}_+(1,0)$. Expliquer pourquoi U est un ouvert connexe par arcs (un dessin suffira). Soit alors $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{y}{|y|}\mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x > 0$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$, que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mais que pourtant f dépend de sa 2e variable !

Exercice 12 Soit $\overrightarrow{\mathrm{F}}(x,y,z) = (y^2\cos(x), 2y\sin(x) + \mathrm{e}^{2z}, 2y\mathrm{e}^{2z})$.

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est un champ de gradients.
2. Déterminer le potentiel V dont dérive $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ sachant que $\mathrm{V}(0,0,0) = 1$.

4.3 Équipotentielles

Exercice 13 Montrer que les surfaces $\mathscr{S}_1 : xy + yz - 4zx = 0$ et $\mathscr{S}_2 : 3z^2 - 5x + y = 0$ se coupent à angle droit au point $(1,2,1)$.

Exercice 14 Soit $a,b,c > 0$. On considère l'ellipsoïde $\mathscr{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est une surface régulière et déterminer une équation du plan tangent en tout point.
2. Si $a = b = c$ ($\mathscr{E}$ est une sphère), retrouver le fait que $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est un vecteur normal à $\mathrm{T_A}\,\mathscr{E}$.

Exercice 15 Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + x + y = 2$.

1. Vérifier que $a = (0,0)$ est un point régulier de $\mathscr{C}$.
2. On admet qu'il existe une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\mathscr{C}$ soit, au voisinage de a, la courbe d'équation $y = \varphi(x)$. Déterminer $\varphi'(0)$.
3. Trouver le développement limité à l'ordre 2 en 0 de φ et en déduire l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de a.

4.4 Les exercices plus techniques

Exercice 16 *(Arts & Métiers).* Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1. Calculer le laplacien $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées de φ.
2. Quelles sont les fonctions φ pour lesquelles f est harmonique c'est-à-dire telle que $\Delta f = 0$? Calculer alors f.

Exercice 17 *(Arts & Métiers).* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} + x^2 - 3. \end{array}$ Déterminer les extrema de f sur $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 16\}$.

Exercice 18 *(laplacien en polaires).* Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On définit la fonction f^* qui « représente f en coordonnées polaires » c'est-à-dire définie par

$$f^*(r, \vartheta) = f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta).$$

1. Exprimer les dérivées partielles 1^{res} et 2^{des} de f^* en fonction de celles de f.
2. En déduire le laplacien de f en fonction des dérivées partielles de f^* (les physiciens disent « le laplacien en polaires »).

Exercice 19 *(une EDP 2).* Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Exercice 20 *(une EDP 3).* (∗) Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Pour ce faire, on déterminera un réel α pour que l'application $(x,y) \mapsto (x+y, \alpha x - y)$ soit un changement de variables convenable pour la résolution de cette EDP.

Exercice 21 *(une EDP 4 – équation de la chaleur en 1D).* (∗) On maintient les extrémités d'une barre de métal de longueur L à la température 0, et on note $\mathrm{T}(x,t)$ la température à l'abscisse x et à l'instant t sur cette barre. J. Fourier a établi en 1807 que

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2} = c\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}$$

où $c > 0$ est une constante liée au métal constituant la barre. On suppose que T est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$: par hypothèse, la fonction $f : x \mapsto \mathrm{T}(x,0)$ – qui modélise la température de la barre à l'instant $t = 0$ — est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\mathrm{L}]$ et vérifie $f(0) = f(\mathrm{L}) = 0$. On suppose de plus qu'elle n'est pas identiquement nulle.

On s'intéresse aux solutions de la forme $\mathrm{T} : (x,y) \mapsto g(x)h(t)$ où $g : [0,\mathrm{L}] \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ (fonction à variables séparées).

1. Justifier que $h(0) \neq 0$ et montrer l'existence d'un réel x_0 tel que $g(x_0) \neq 0$.
2. En déduire que h est solution d'une EDL1 que l'on résoudra.
3. Expliquer pourquoi il existe un réel positif t_0 tel que $(h(t_0), h'(t_0)) \neq (0,0)$ et en déduire que g est solution d'une EDL2 de la forme $g'' = kg$, où k est une constante réelle non nulle.
4. Démontrer qu'il est impossible d'avoir $k > 0$.
5. Conclure : la fonction T est nécessairement de la forme $(x,t) \mapsto b\sin(n\pi\frac{x}{\mathrm{L}})\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{c\mathrm{L}^2}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

4.5 (*) Intégrales multiples

Exercice 22 Après avoir représenté D, calculer $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ et $\mathrm{D} = \{(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \mid x+y \leqslant 1\}$.
2. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ et $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.
3. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ et $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant \mathrm{R}^2\}$ (avec $\mathrm{R} > 0$).

Exercice 23 Après avoir représenté D, calculer $\displaystyle\iiint_{\mathrm{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y,z) = 1$ et $\mathrm{D} = \{(x,y,z) \in {\mathbb{R}_+}^3 \mid x+y+z \leqslant 1\}$.
2. $f(x,y,z) = z$ et $\mathrm{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant h\}$ (avec $h > 0$).
3. $f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ et $\mathrm{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant b^2\}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 < a < b$.

Exercice 24 *(intégrale de Gauss).* On pose, pour $\mathrm{R} > 0$, $\mathrm{I_R} = \displaystyle\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Écrire $(\mathrm{I_R})^2$ comme une intégrale double sur le pavé $[0,\mathrm{R}]^2$. En encadrant ce pavé entre deux quarts de disque, déterminer la célèbre valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (définie comme étant la limite de $\mathrm{I_R}$ quand $\mathrm{R} \to +\infty$).

Exercice 25 Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ (où $a, b > 0$). Faire un dessin. Montrer que la surface que $\mathscr{E}$ délimite est πab.

Déterminer de même le volume contenu dans l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ (où $a, b, c > 0$).

Exercice 26 On pose $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$. Calculer $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} (x+y)^2\mathrm{e}^{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en faisant le changement de variable $u = x+y$ et $v = x-y$.

Exercice 27 Calculer le centre de gravité d'un demi-disque D de rayon R, c'est-à-dire le point G de D tel que $\iint_{\mathrm{M}\in\mathrm{D}} \overrightarrow{\mathrm{GM}}\,\mathrm{dM} = \vec{0}$. *Une autre façon sera vue en SI s'appuyant sur un théorème de Guldin.*

Exercice 28 Retrouver l'aire d'une sphère de rayon R grâce à une intégrale surfacique.

Exercice 29 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{B}_n(\mathrm{R})$ la boule $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant \mathrm{R}^2\}$ de centre 0, de rayon R, et $\mathrm{V}_n(\mathrm{R})$ son volume, c'est-à-dire

$$\mathrm{V}_n(\mathrm{R}) = \iint \ldots \int_{\mathrm{B}_n(\mathrm{R})} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n.$$

1. Établir que $\mathrm{V}_n(\mathrm{R}) = \mathrm{V}_n(1)\mathrm{R}^n$.
2. Calculer $\mathrm{V}_1(1)$, $\mathrm{V}_2(1)$ et $\mathrm{V}_3(1)$ et retrouver les volumes appris dès le collège.
3. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{V}_{n+2}(1) = \mathrm{V}_n(1)\displaystyle\iint_{\mathrm{B}_2(1)} (1-x^2-y^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
4. Grâce à un changement de variables polaires, montrer que $\iint_{\mathrm{B}_2(1)}(1-x^2-y^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\pi}{n+2}$.
5. En déduire les volumes de $\mathrm{B}_4(1)$, $\mathrm{B}_5(1)$, $\mathrm{B}_6(1)$, puis celle de $\mathrm{B}_{2k}(\mathrm{R})$ pour tout k.
6. On calcule de même $\mathrm{V}_{2k+1}(1) = \frac{2k!(4\pi)^k}{(2k+1)!}$ pour tout k. Grâce à un programme en Python, déterminer la valeur de n telle que $\mathrm{V}_n(1)$ soit maximal.
7. Lorsque $n \to \infty$, prouver que la boule $\mathrm{B}_n(1)$ occupe une place négligeable dans son cube circonscrit $[-1,1]^n$.

5 De l'Algèbre linéaire (partie 2)

✓ Savoir expliquer pourquoi toute matrice M admet un polynôme annulateur à l'aide de la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2, \ldots, \mathrm{M}^{n^2})$.

✓ Avoir compris le lien entre sous-espace stable et matrice par blocs.

✓ Connaître toutes les caractérisations possibles des hyperplans.

✓ Étant donné un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ décrit par une équation, savoir en exhiber une base.

✓ Savoir donner une base d'une intersection de p hyperplans : résoudre un système linéaire.

✓ Avoir compris que les transvections ($\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha \mathrm{L}_j$ avec $i \neq j$) laissaient invariant le déterminant.

✓ Savoir calculer un déterminant en le développant suivant une rangée après avoir fait des opérations élémentaires $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha \mathrm{L}_j$ $(i \neq j)$.

✓ Connaître le déterminant de Vandermonde et son implication dans la théorie de l'interpolation de Lagrange.

♠ Oublier de dire « non nulle » pour les formes linéaires dont le noyau est un hyperplan.

♠ Ne pas avoir compris qu'un polynôme en M est une matrice, et qu'un polynôme en u est un endomorphisme.

♠ Oublier de remplacer le « 1 » par I_n ou Id_E quand on explicite $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ ou $\mathrm{P}(u)$: il ne faut pas écrire « $\mathrm{M} + 1$ » si M est une matrice !

♠ Écrire $\mathrm{P}(u(x))$ ou $\mathrm{P}(x)$, qui n'ont aucun sens, au lieu de $\mathrm{P}(u)(x)$.

♠ Ne pas savoir immédiatement ce que valent $(\mathrm{PQ})(u)$ et $(\mathrm{PQ})(\mathrm{M})$ (avec les notations du cours).

♠ Croire que $\mathbb{K}[\mathrm{M}]$ est de dimension infinie parce que c'est le cas de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

♠ Parler « du » supplémentaire d'un hyperplan.

♠ Parler de « l' » équation d'un hyperplan.

♠ Croire que l'équation $y = ax$ désigne une droite dans $\mathbb{R}^3$; elle représente un plan.

♠ Croire que $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda \det(\mathrm{A})$ ou que $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})$: Ce n'est vrai qu'en dimension 1.

♠ Développer un déterminant avant d'avoir fait des opérations sur les lignes et les colonnes : il faut faire apparaître des 0 le plus possible !

♠ Ne pas vraiment maîtriser le symbole $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ dans la formule de Vandermonde.

5.1 Polynômes de matrices, d'endomorphismes

Exercice 1 Donner un polynôme annulateur (non nul) pour une projection, une symétrie, une homothétie et pour l'application nulle.

Exercice 2

1. Rappeler l'argument qui permet de prouver qu'en dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme annulateur non nul.
2. Montrer que la dérivation de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul.
3. Montrer que si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, un polynôme annulateur de M est $\mathrm{X}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{X} + \det(\mathrm{M})$.
4. En déduire une expression de M^{-1} quand $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 3 *(polynôme minimal).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler pourquoi M possède un polynôme annulateur non nul.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme, noté π_M, unitaire, annulateur de M et de degré le plus petit possible.
3. Justifier que $\deg \pi_\mathrm{M} \leqslant n^2$ (on verra que $\deg \pi_\mathrm{M} \leqslant n$ au chapitre 7).
4. Grâce à une division euclidienne, démontrer que tout polynôme annulateur de M est un multiple de π_M.
5. Démontrer que $\dim \mathbb{K}[\mathrm{M}] = \deg \pi_\mathrm{M}$.

5.2 Déterminants

Exercice 4 Montrer qu'il n'existe aucune matrice antisymétrique inversible de taille 2025.

Exercice 5 Soit m un réel. Calculer $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}$ en factorisant le plus possible. Généraliser.

Exercice 6 Soit A une matrice réelle 3×3 dont $\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+3$ est un polynôme annulateur. En supposant que $\det(\mathrm{A}) > 0$, calculer $\det(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3)$.

Exercice 7 *(Déterminant tridiagonal).* Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{vmatrix}$

1. Trouver une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. En déduire une expression simple de Δ_n en fonction de n.

Exercice 8 Grâce à un déterminant de Vandermonde, retrouver le fait que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre, où, pour tout complexe a, $f_a : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ est définie sur un intervalle I de longueur non nulle.

Exercice 9 Soit a dans $\mathbb{C}$. On considère l'endomorphisme $\mu_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az, \end{array}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Déterminer $\det(\mu_a)$ et $\mathrm{tr}(\mu_a)$. Et si $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 10 Soit A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme $\mathrm{L_A} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX}. \end{array}$ Déterminer sa trace et son déterminant. Généraliser quand $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\intercal. \end{array}$

Indication : que peut-on dire de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 12 Soit a, b et c des réels tels que $b \neq c$. On souhaite calculer le déterminant $n\times n$ suivant :

$$\mathrm{D}(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & & c \\ & \ddots & \\ b & & a \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathrm{D}(a+\mathrm{X}, b+\mathrm{X}, c+\mathrm{X})$ est un polynôme affine.
2. En déduire la valeur de $\mathrm{D}(a,b,c)$.
3. Étudier le cas où $b = c$ par un astucieux passage à la limite.

Exercice 13 *(un déterminant sans calcul).* Trouver la valeur de $\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & \cdots & 5^3 \\ 2^3 & 3^3 & \cdots & 6^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 5^3 & 6^3 & \cdots & 9^3 \end{vmatrix}$.

Indication : que peut-on dire d'une famille de 5 polynômes de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$?

Exercice 14 Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$ tels que $p < n$. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, démontrer que $\det(\mathrm{AB}) = 0$. *Indication : on pourra se servir du théorème du rang.*

Exercice 15 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que $\det\left(i^j\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}} = 1!2!\ldots n!$.

Exercice 16 *(Centrale 2024).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$, et soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$. Montrer qu'en fait A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication. On écrira $\mathrm{P} = \mathrm{Q} + i\mathrm{R}$ *avec* Q, R *réelles et on expliquera pourquoi la fonction polynôme* $x \mapsto \det(\mathrm{Q} + x\mathrm{R})$ *n'est pas identiquement nulle sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 17 Soit n un entier au moins égal à 2. Trouver les matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(\mathrm{A} + \mathrm{X}) = \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{X}).$$

Indication : montrer qu'une telle matrice A *n'est pas inversible. Ensuite, imaginer un instant qu'une colonne de* A *soit non nulle, et créer une matrice inversible* X *astucieusement.*

Exercice 18 *(comatrice).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\Delta_{i,j}(\mathrm{A})$ le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j de A. On note alors Com(A) la matrice carrée de taille n dont le terme de place (i, j) est $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(\mathrm{A})$.

1. Calculer Com(A) si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
2. Démontrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{Com}(\mathrm{A})^\intercal = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$. En déduire A^{-1} si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
3. Application. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\mathrm{A}^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.
   (a) Proposer une matrice A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det(\mathrm{A}) \neq 0$ mais qui n'est pas dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \left\{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det(\mathrm{A}) \in \{-1, 1\}\right\}$.

Exercice 19 Soit n et $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Que dire si $a_k = k$ pour tout k ?

Exercice 20 Soit n et p des entiers naturels, n étant non nul. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{n+i-1}{j-1}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p+1\\ 1\leqslant j\leqslant p+1}}$. *Indication : on opérera* $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_{i-1}$ *pour* $i > 1$.

Exercice 21 Soit X un ensemble non vide, n un entier naturel non nul et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille libre dans $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$. Montrer qu'il existe n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de X tels que la matrice $\left(f_i(x_j)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ soit inversible.

Indication : on le montrera par récurrence sur n en développant un déterminant par rapport à sa dernière colonne.

5.3 Formes linéaires et hyperplans

Exercice 22 1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Pourquoi l'ensemble des polynômes qui sont des multiples de X est-il est un hyperplan de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$?

Exercice 23 Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que tout vecteur de E qui n'est pas dans H engendre un supplémentaire de H.

Exercice 24 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, supposée non nulle. Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension $p \in [\![0, n-1]\!]$ est l'intersection de $n-p$ hyperplans.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^4$, décrire la droite $\mathbb{R}u$, où $u = (1, 2, 3, 4)$, comme une intersection de 3 hyperplans.

Exercice 25 *(utilisation du théorème du rang).* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, supposée non nulle.

1. Soit $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_p$ des hyperplans de E. Montrer que $\dim \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{H}_k \geqslant n-p$.
2. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille libre de E^*. Montrer que $\dim \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k) = n-p$.

Exercice 26 *(Détermination du dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

1. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, vérifier que $\Phi_{\mathrm{A}} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{AM})$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Réciproquement, montrer que toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de cette forme.

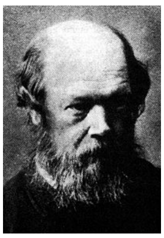
Exercice 27 Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété fondamentale de la trace :

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \varphi(\mathrm{AB}) = \varphi(\mathrm{BA}).$$

Montrer que φ est proportionnelle à la trace. *Indication : utiliser les matrices* $\mathrm{E}_{i,j}$ *et l'exercice précédent.*

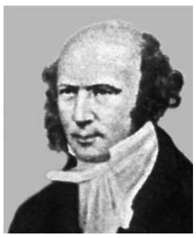
Exercice 28 *(Dualité).* On rappelle que l'on note E^* au lieu de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $(\varphi, x) \in \mathrm{E}^* \times \mathrm{E}$, le scalaire $\varphi(x)$ se note souvent $\langle \varphi, x \rangle$.

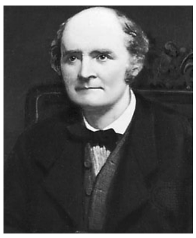
1. Si E est de dimension n, on considère $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour chaque i, on note e_i^* la forme linéaire qui à chaque $x \in \mathrm{E}$ associe sa composante sur e_i. Que vaut $\langle e_i^*, e_j \rangle$ pour tous i et j ? En déduire que $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée *base duale* de $\mathscr{B}$.
2. Déterminer $\mathscr{B}^*$ quand $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. *Indication : penser à Taylor !*
3. On suppose ici que E **n'est pas** de dimension finie, et qu'il possède une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Montrer que $\mathscr{B}^*$ est toujours libre, mais pas génératrice de E^*.


A-Th. Vandermonde (1735-1796)


P. S. de Laplace (1749-1827)


A. L. Cauchy (1789-1857)


W. R. Hamilton (1805-1865)


A. Cayley (1821-1895)

6 Des espaces vectoriels normés

- ✓ Savoir ce qu'est une norme dans le cas général, et connaître les normes des espaces usuels.
- ✓ Savoir montrer qu'une partie est convexe, bornée.
- ✓ Savoir montrer que deux normes sont équivalentes, ou à défaut, savoir utiliser une suite pour montrer qu'elles ne le sont pas.
- ✓ Connaître la définition de la convergence des suites, et savoir la caractériser par les coordonnées en dimension finie.
- ✓ Savoir montrer qu'une partie est/n'est pas ouverte/fermée. Utiliser les suites pour montrer qu'une partie est fermée.
- ✓ Savoir expliquer à l'aide des suites ce qu'est une partie dense.

- ♠ Oublier les modules dans les normes usuelles sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
- ♠ Croire que toutes les boules sont rondes : ce n'est vrai que pour la norme $\|\cdot\|_2$ (aussi appelée norme euclidienne).
- ♠ Ne pas avoir compris que le caractère borné dépend de la norme : une partie peut être bornée pour une norme, et non bornée pour une autre.
- ♠ Croire qu'une partie qui n'est pas ouverte est nécessairement fermée : penser à $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

6.1 Normes sur un espace vectoriel

Exercice 1 *(Centrale-Supélec 2022, extrait).* Montrer que toutes les normes sur $\mathbb{R}$ sont proportionnelles à la valeur absolue.

Exercice 2 Pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{N}(x,y) = \max(|x|,|y|,|x-y|)$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter sa boule unité.

Exercice 3 Soit $\mathrm{A} = (x,y)$ et $\mathrm{B} = (x',y')$ dans $\mathbb{R}^2$. On note AB la distance euclidienne entre A et B, c'est-à-dire $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$. On pose alors

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \begin{cases} \mathrm{AB} & \text{si O, A, B sont alignés,} \\ \mathrm{OA}+\mathrm{OB} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit que d est la distance SNCF sur $\mathbb{R}^2$.

1. Proposer une explication de cette appellation.
2. On admet que d vérifie les trois axiomes d'une distance (l'inégalité triangulaire est fastidieuse à montrer). Représenter la boule fermée de centre $(1,0)$ de rayon 2.
3. En déduire que d n'est pas *normique*, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|$ pour tous A et B dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 Sur l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, on pose, pour toute f dans E,

$$\|f\| = \|f\|_{\infty,[0,1]} + \|f'\|_{\infty,[0,1]}.$$

Montrer que $\|f\|$ est correctement défini et que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

Exercice 5 On pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$, et, pour toute f dans F, $\mathrm{N}(f) = \|f'\|_{\infty,[0,1]}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et que N est une norme sur F.
2. Montrer que N et $\|\cdot\|_{\infty,[0,1]}$ ne sont pas équivalentes. *Indication : on pourra considérer la suite* $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 Pour chaque P dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrivant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose

$$N_1(P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$, mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 7 *(Centrale-Supélec).* Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(M^\intercal \cdot M)}$ et $\|M\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$.

1. Expliciter $\|M\|_2$ en fonction des coefficients de la matrice M.
2. Montrer que $\|MN\|_2 \leqslant \|M\|_2 \cdot \|N\|_2$ pour toutes M et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans* $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que l'on a seulement $\|MN\|_\infty \leqslant n\|M\|_\infty \|N\|_\infty$ pour toutes M et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $c > 0$ tel que $\|MN\| \leqslant c \cdot \|M\| \cdot \|N\|$ quelles que soient M et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6.2 Suites dans un EVN

Exercice 8 Pour tout entier n, on pose $f_n = x \mapsto x^n$ et on se place dans l'espace $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.
Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|_{1,[0,1]}$, mais pas pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,[0,1]}$.

Exercice 9 Soit A dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de sa limite ?
Indication. On utilisera le fait, démontré à l'exercice 15, qu'un sous-espace d'un EVN de dimension finie est toujours fermé.

Exercice 10 Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe une suite $(a_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_k A^k$ converge. Montrer que la somme de cette série est un polynôme en A. *Indication. On utilisera le fait, démontré à l'exercice 15, qu'un sous-espace d'un EVN de dimension finie est toujours fermé.*

Exercice 11 *(ACV $\Longrightarrow$ CV ?)* Pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |p_n|$ où p_n est, pour tout entier n, le coefficient de degré n de P.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est correctement définie et que c'est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{2^n} X^n$ est absolument convergente dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.
3. Montrer cependant que $\sum \frac{1}{2^n} X^n$ ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.

Exercice 12 $(*)$ *(Des suites dans l'espace des suites !)* On note ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et c_0 celui des suites qui converge vers 0. Enfin, on note $\mathscr{N}$ le sous-espace de c_0 des suites valant 0 à partir d'un certain rang.
Montrer que $\overline{\mathscr{N}} = c_0$.

6.3 Topologie sur un EVN

Exercice 13 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme quelconque.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ni bornée, ni convexe, ni fermée, mais qu'elle est ouverte.
2. Si $n \geqslant 2$, montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est partie ni bornée, ni convexe, ni ouverte, mais qu'elle est fermée. Et si $n = 1$?

Rappel. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ *est celui des matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *dont le déterminant vaut 1.*

Exercice 14 Soit A une partie d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. Montrer que $\mathring{A}$ est la réunion de toutes les parties ouvertes incluses dans A.
2. En déduire que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Exercice 15 (*topologie des sev*). Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace normé.

1. Montré que tout sous-espace vectoriel F distinct de E est d'intérieur vide (donc n'est jamais une partie ouverte) ;
2. On suppose ici que $\dim(\mathrm{E}) < \infty$. Montrer tout sous-espace vectoriel de E est fermé. *Indication : on utilisera des coordonnées dans une base adaptée.*
3. On ne suppose plus E de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que F est fermé. *Indication : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on pourra considérer $\mathrm{F}+\mathrm{Vect}(\ell)$.*
4. Ici $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 16 (*topologie des hyperplans*). On se place dans un EVN E de dimension quelconque.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{\mathrm{F}}$ en est un aussi.
2. En déduire qu'un hyperplan est ou bien fermé, ou bien dense dans E.

Exercice 17 *(topologie des boules).* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est un EVN.

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$. Montrer que $\overline{\mathrm{B}^{\mathrm{o}}(a,r)} = \mathrm{B}^{\mathrm{f}}(a,r)$ et que $\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{B}^{\mathrm{f}}(a,r)}} = \mathrm{B}^{\mathrm{o}}(a,r)$.
2. $(*)$ Soit $a, a' \in \mathrm{E}$ et $r, r' > 0$. Montrer que $\mathrm{B}^{\mathrm{o}}(a,r) = \mathrm{B}^{\mathrm{o}}(a',r') \Longrightarrow \Big[a = a' \ \text{ et } \ r = r'\Big]$.

Remarque. Ces propriétés deviennent fausses en général dans un espace métrique.

Exercice 18 *(Plus impressionnant que difficile).* Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un EVN quelconque et soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. On admet ici (cf. exercice 14) que $\mathring{\mathrm{A}}$ est un ouvert de E et que $\overline{\mathrm{A}}$ en est un fermé.

1. Montrer que $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{\mathrm{A}}}}} = \overset{\circ}{\overline{\mathrm{A}}}$ et que $\overline{\overset{\circ}{\overline{\mathring{\mathrm{A}}}}} = \overline{\mathring{\mathrm{A}}}$.
2. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, muni de sa valeur absolue en tant que norme, exhiber une partie A telle que les sept ensembles $\mathrm{A}, \mathring{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathring{\mathrm{A}}}, \overset{\circ}{\overline{\mathrm{A}}}, \overset{\circ}{\overline{\mathring{\mathrm{A}}}}$ et $\overline{\overset{\circ}{\overline{\mathrm{A}}}}$ soient deux à deux distincts.
   Indication. On cherchera A *sous la forme* $\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}\cup\mathrm{Z}$ *avec* X *une partie dense dans* $[0,1]$ *et* Y *un fermé d'intérieur vide.*

7

De la réduction (partie 1)

✓ Maîtriser le vocabulaire de base et savoir définir tous les trucs propres.

✓ Savoir calculer un déterminant de façon efficace (le plus factorisé possible) pour trouver les valeurs propres d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme (en dimension finie, évidemment).

✓ Avoir compris le lien entre endomorphisme diagonalisable et matrice carrée diagonalisable.

✓ Savoir déterminer des sous-espaces propres en résolvant des systèmes linéaires.

✓ Savoir établir qu'une matrice est diagonalisable.

✓ Savoir que la dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité de la valeur propre à laquelle il est associé.

✓ Connaître la condition suffisante pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable : admettre n valeurs distinctes.

✓ Savoir qu'une matrice n'ayant qu'une valeur propre n'est diagonalisable seulement que lorsqu'elle est proportionnelle à la matrice identité.

✓ Savoir montrer que le spectre d'une matrice nilpotente est réduit à $\{0\}$.

✓ Savoir diagonaliser une symétrie ou une projection.

♠ Oublier de préciser la non nullité d'un vecteur propre. Ainsi, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et s'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = \lambda x$, on ne peut pas conclure que λ est une valeur propre de f. En effet, cette égalité est toujours vraie, quel que soit λ, en prenant $x = 0_{\mathrm{E}}$.

♠ Croire qu'une matrice diagonalisable a des valeurs propres toutes distinctes : la réciproque du théorème du cours n'est pas vraie ! Il suffit de se souvenir de la matrice nulle pour s'en convaincre.

♠ Croire qu'une combinaison linéaire de matrices diagonalisables est aussi diagonalisable. Il faut connaître le contre-exemple :

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

7.1 Exercices de base

Exercice 1 Soit n un entier naturel non nul et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que A et A^T ont exactement les mêmes valeurs propres.
2. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$. Montrer que A et A^T n'ont pas les mêmes sous-espaces propres.

Exercice 2 Trouver A et B dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non semblables mais telles que $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B}$.

Exercice 3 Soit A une matrice inversible de taille n.

1. Rappeler pourquoi $0 \notin \mathrm{Sp}_\mathbb{K}(\mathrm{A})$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}_\mathbb{K}(\mathrm{A}^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{K}(\mathrm{A})\}$.
3. Pour chaque λ dans $\mathrm{Sp}_\mathbb{K}(\mathrm{A})$, montrer que $\mathrm{E}_{\frac{1}{\lambda}}(\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$.
4. Si $\chi_\mathrm{A} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \ldots + a_n\mathrm{X}^n$, démontrer que $\chi_{\mathrm{A}^{-1}} = \frac{1}{a_0}\left[a_n + a_{n-1}\mathrm{X} + \ldots + a_0\mathrm{X}^n\right]$: c'est le polynôme χ_A « lu à l'envers » ! (et normalisé).

Exercice 4 Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et déterminer leurs éléments propres.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 7\end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\2 & -3 & 2\\-1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Calculer toutes les puissances de A et B (pour B, trouver un polynôme annulateur de degré 2).

Exercice 5 *(oral CCINP).* Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de taille $n \geqslant 2$.

Exercice 6 *(théorème spectral en dimension 2).*

1. Soit a, b, c trois réels. Montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une matrice symétrique 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ qui n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7 *(Centrale 2024).* Soit n un entier naturel non nul et soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{B}) = \varnothing.$$

Montrer que cette équivalence est fausse si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

Exercice 8 On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de longueur non nulle. On note D l'opérateur de dérivation. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 9 On pose $\mathrm{E} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et on note D l'opérateur de dérivation. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 10 On note E le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ constitué des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ ayant 0 pour limite. On considère l'endomorphisme D de E défini par $\mathrm{D}u = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour tout élément u de E. Déterminer les éléments propres de D.

Exercice 11 Soit n dans $\mathbb{N}$. Pour tout P dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$.
2. Justifier que φ est diagonalisable.

Exercice 12 *(CCINP).* On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et préciser une matrice inversible P telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit une matrice diagonale D.
2. Montrer que l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$ d'inconnue M à chercher dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est équivalente à l'équation $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{D}$ d'inconnue X à chercher dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. (a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et Δ une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont tous distincts. On suppose qu'une matrice M commute avec Δ. Montrer que M est diagonale.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

7.2 Les grands classiques

Exercice 13 *(diagonalisation simultanée).* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u, v des endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
2. On suppose que u et v sont diagonalisables. Montrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales. Traduire ce fait matriciellement.
3. Application. Si u et v commutent et sont diagonalisables, montrer que $u + v$ est diagonalisable.

Exercice 14 *(matrices carrées de rang 1).*

1. Trouver « sans calcul » les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, et montrer qu'elle est diagonalisable. Même question avec la matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \geqslant 2$) dont tous les termes sont égaux à 1.

2. Plus généralement, soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 (où $n \geqslant 2$). Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right)$.
3. En déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.
4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 15 On pose $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout f dans E, on note $T(f)$ la fonction définie par $T(f)(0) = f(0)$ et

$$\forall x \in \left]0,1\right], \quad T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T est bien un endomorphisme de E.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 16 *(densité de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*)* Soit n un entier naturel non nul.

1. Si $A\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que pour tout entier k assez grand, $A - \frac{1}{k}I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 17 *(matrice compagnon).* Si $P = X^k + \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme unitaire de degré k, on pose

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que $\chi_{C_P} = P$.
2. On suppose que P possède une racine λ dans $\mathbb{K}$. Déterminer $\dim E_\lambda(C_P)$.
3. En déduire que C_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

Exercice 18 Soit n un entier naturel non nul et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Si $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur à 1.
2. Si $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, montrer que sa limite est un projecteur. Qu'en conclure sur le spectre de cette limite ?

Exercice 19 *(une preuve du théorème de Cayley-Hamilton).* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et soit u dans $\mathscr{L}(E)$. On souhaite montrer que $\chi_u(u)$ est l'endomorphisme nul.

1. Soit x un vecteur non de E. Justifier l'existence du plus grand entier p tel que $(x, u(x), \dots u^{p-1}(x))$ soit une famille libre, que l'on notera $\mathscr{B}_x$. On pose $\mathscr{V}_x = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.
2. Vérifier que $\mathscr{V}_x$ est stable par u, et donner la matrice de l'endomorphisme induit u_x sur $\mathscr{V}_x$ dans la base $\mathscr{B}_x$.
3. On note χ_x le polynôme caractéristique de u_x. Prouver que $\chi_x(u_x) = 0$, et conclure.

7.3 Suites récurrentes et systèmes différentiels

Exercice 20 Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 4x - 3y, \\ y' & = & 2x - 3y. \end{array}\right.$

Exercice 21 Résoudre l'équation différentielle $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ en la transformant en un système différentiel linéaire d'ordre 1.

Exercice 22 Déterminer toutes les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n.$$

7.4 Les exercices plus techniques

Exercice 23 On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout f dans E, on note $\mathrm{T}(f)$ la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{T}(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

Montrer que T est bien un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 24 *(Tube inter-concours).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k = k\mathrm{A}^k$.
2. En considérant l'endomorphisme $\Phi : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{XB} - \mathrm{BX}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que A est nilpotente.

Exercice 25 *(sous-espaces stables et transposée)* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. On note A la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ de E. On considère enfin l'hyperplan H d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, et on pose $\mathrm{C} = (a_1, \ldots, a_n)^\intercal$.

1. Montrer que H est stable par f si et seulement si C est vecteur propre de $\mathrm{A}^\intercal$.
2. *Application 1.* Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 possède au moins un plan stable.
3. *Application 2.* Déterminer tous les sous-espaces stables de $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 26 *(commutant d'un endomorphisme diagonalisable)* E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on pose

$$\Gamma_f = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid f \circ g = g \circ f\}.$$

Dans toute la suite on suppose que f est diagonalisable.

1. Vérifier que Γ_f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Soit g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que $g \in \Gamma_f$ si et seulement si chaque sous-espace propre de f est stable par g.
3. En déduire que $\dim \Gamma_f = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (m_\lambda)^2$, où m_λ est la multiplicité de λ dans χ_f.

Exercice 27 Une $\mathbb{R}$-*algèbre* est un quadruplet $(\mathrm{A}, +, \times, \cdot)$ où $(\mathrm{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\times$ une « multiplication » c'est-à-dire une application bilinéaire de A^2 dans A. Cette algèbre est dite

— *associative* quand $\times$ est associative : $\forall (a,b,c) \in \mathrm{A}^3,\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

— *unitaire* quand $\times$ possède un neutre (souvent noté 1_A) : $\forall a \in \mathrm{A},\ a \times 1_\mathrm{A} = 1_\mathrm{A} \times a = a$.

De plus, une $\mathbb{R}$-algèbre associative unitaire $(\mathrm{A}, +, \times, \cdot)$ est dite *à division* quand tout élément non nul y est inversible c'est-à-dire quand

$$\forall a \in \mathrm{A} \setminus \{0_\mathrm{A}\},\ \exists b \in \mathrm{A},\ a \times b = b \times a = 1_\mathrm{A}.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'excepté $(\mathbb{R}, +, \times, \cdot)$, toute $\mathbb{R}$-algèbre à division de dimension finie est nécessairement de dimension paire.

1. Donner un exemple de $\mathbb{R}$-algèbre à division de dimension 2, puis une de dimension infinie. Si $n \in \mathbb{N}^*$, est-ce que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre à division ?
2. Soit $(\mathrm{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{R}$-algèbre à division de dimension finie n. Imaginons un instant que n soit impair.
   — Soit a dans $\mathrm{A} \setminus \{0\}$. Justifier que $\mathrm{L}_a : x \mapsto a \times x$ est un endomorphisme de A et montrer qu'il a au moins une valeur propre.
   — En déduire que A est isomorphe à $\mathbb{R}$ (en tant qu'algèbre : l'isomorphisme $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ doit en plus vérifier $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$ et $f(1_\mathrm{A}) = 1$) et conclure.

L'exercice 38 du TD n° 2 donne l'exemple d'une $\mathbb{R}$-algèbre à division de dimension 4.

Des limites et de la continuité dans les EVN 8

- ✓ Avoir compris que les limites et la continuité dans les EVN sont une simple généralisation de ce que l'on apprend dans un cours de 1re année pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: la valeur absolue a été remplacée par des normes.
- ✓ Savoir montrer qu'une partie est fermée (resp. ouverte) en l'écrivant comme l'image réciproque d'une partie fermée (resp. ouverte) par une application continue.
- ✓ Savoir montrer qu'une application est lipschitzienne.
- ✓ Savoir établir qu'une application linéaire est continue : la question ne se pose qu'en dimension infinie, car en dimension finie elles sont toutes continues.
- ✓ Savoir ce qu'est une application multilinéaire et une application polynomiale (en connaissant les exemples de base).

- ♠ Croire qu'une fonction continue définie sur un fermé-borné est toujours bornée : c'est faux en dimension infinie en général.
- ♠ Essayer de montrer qu'une application linéaire est continue en revenant à la définition générale : c'est extrêmement rare, on utilise presque toujours le critère lipschitzien « $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ ».
- ♠ Pour une fonction « de deux variables » $(x, y) \mapsto f(x, y)$, confondre linéarité par rapport au couple (x, y) et bilinéarité (linéarité par rapport à chacune des deux variables).

8.1 Topologie dans les EVN

Exercice 1 Prouver par trois méthodes que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$:

1. en prouvant que son complémentaire est un ouvert.
2. par la caractérisation séquentielle des fermés.
3. en voyant $\mathbb{Z}$ comme l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Exercice 2 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. L'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est normé par une norme quelconque.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (matrices de déterminant 1) en est un fermé.
2. Montrer, à l'aide de suites, que l'ensemble $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices complexes $n \times n$ diagonalisables sur $\mathbb{C}$ n'est ni fermé, ni ouvert.
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$ pour toutes matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\|\mathrm{M}\| \geqslant 1$ pour toute M dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

Exercice 3 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{L}$ l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ formant une famille liée.

1. Si x et y sont dans $\mathbb{R}^n$, montrer que la famille (x, y) est libre si et seulement s'il existe i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$ tels que $\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \neq 0$.
2. En déduire que $\mathscr{L}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (normé par une norme quelconque).

Exercice 4 On note ℓ^1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |a_n|$ converge. Si $a \in \ell^1$, on pose $\|a\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur ℓ^1.
2. On pose $\mathrm{A} = \left\{a \in \ell^1 \mid \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 1\right\}$. L'ensemble A est-il ouvert ? Fermé ? Borné ?

Exercice 5 *(somme de deux fermés).* On pose

$$\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

1. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
2. Prouver que $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ (défini comme étant $\{a+b \mid (a,b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}\}$) n'est pas fermé.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'ensemble des projecteurs de E est un fermé de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer qu'il n'est pas borné (*on pourra raisonner matriciellement*).

Exercice 7 *(jauge de Minkowski).*

8.2 Limites et continuité

Exercice 8 Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 9 En utilisant la caractérisation séquentielle, montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point.

Exercice 10 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers P. Montrer que A et P commutent et que P est une matrice de projection.

Exercice 11 *(Centrale-Supélec).* Soit A une partie non vide d'un EVN $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$. Pour tout x dans E, on note $d(x,\mathrm{A})$ la borne inférieure de l'ensemble $\{\|x-a\| : a \in \mathrm{A}\}$: c'est la distance de x à A.

1. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,\mathrm{A})$ est lipschitzienne (donc continue) de E dans $\mathbb{R}$.
2. Si A est fermé, montrer que $d(x,\mathrm{A}) = 0 \iff x \in \mathrm{A}$.
3. Donner un exemple de situation où $d(x,\mathrm{A}) = 0$ et $x \notin \mathrm{A}$.
4. $(*)$ L'espace $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note A l'ensemble des f de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f \geqslant 1$. Calculer $d(0,\mathrm{A})$ et montrer que cette borne inférieure n'est pas atteinte bien que A soit un fermé.

Exercice 12 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, montrer que $\chi_{_{\mathrm{AB}}} = \chi_{_{\mathrm{BA}}}$.
2. Montrer que cette égalité est vraie même si A n'est pas inversible.

Exercice 13 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On rappelle (cf. TD n° 5, exercice 3) que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ il existe un unique polynôme π_{M} unitaire, annulateur de M, de degré le plus petit possible parmi tous les polynômes annulateurs non nuls de M.

1. Justifier que $\pi_{\mathrm{M}} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
2. Que vaut π_{M} si $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $a \in \mathbb{K}^*$? En déduire que $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \pi_{\mathrm{M}} \end{array}$ n'est pas continue.

Exercice 14 *(Centrale 2025).* Soit I un intervalle. On pose $\mathrm{C} = \{(x,y) \in \mathrm{I}^2 \mid x < y\}$.

1. Si $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que $\mathrm{F}\langle \mathrm{C} \rangle$ est un intervalle.
2. En déduire que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue et injective, alors f est strictement monotone.
3. Exhiber une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective mais pas strictement monotone.

8.3 Applications linéaires continues

Exercice 15 On note δ la forme linéaire $P \mapsto P(0)$ de $\mathbb{R}[X]$. On note N_1, N_2 et N_3 les normes sur $\mathbb{R}[X]$ définies par

$$N_1(P) = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| \, dt, \quad N_3(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

(où a_n est le n-ième coefficient de P). Pour quelles normes δ est-elle continue ? Calculer sa constante de Lipschitz $|||\delta|||$ le cas échéant.

Exercice 16 L'espace $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ est muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$, et l'espace $F = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ de la norme N définie par $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On considère l'application $\Psi : E \to F$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \Psi(f) = x \longmapsto \int_0^x f(t) \, dt.$$

Montrer que Ψ est une application linéaire continue. Déterminer sa constante de Lipschitz $|||\Psi|||$.

Exercice 17 *(Grand classique).* On note E l'espace $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\| \cdot \|_\infty$. On considère l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) = \int_0^{1/2} f(t) \, dt - \int_{1/2}^1 f(t) \, dt.$$

1. Montrer que Φ est une application linéaire continue.
2. $(*)$ Déterminer $|||\Phi|||$ et montrer qu'il n'existe pas f dans $E \setminus \{0\}$ tel que $|||\Phi||| = \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|_\infty}$.
3. Déduire de cette impossibilité que le théorème des bornes atteintes tel qu'énoncé dans le cours n'est pas valable en dimension finie.

Exercice 18 *(Centrale-Supélec 2022).* Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et u dans $\mathscr{L}(E, F)$.

1. On suppose que $F = \mathbb{K}$: u est donc une forme linéaire.
   (a) Si u est continue, expliquer pourquoi $\mathrm{Ker}(u)$ est une partie fermée de E.
   (b) Réciproquement, on suppose $\mathrm{Ker}(u)$ fermé. On souhaite montrer que u est continue. Imaginions que cela ne soit pas le cas.
      i. Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la boule unité de E telle que $\lim_{n \to +\infty} |u(x_n)| = +\infty$. En particulier, $u(x_n) \neq 0$ à partir d'un certain rang N.
      ii. En considérant la suite $\left(x_N - \frac{u(x_N)}{u(x_n)} x_n \right)_{n \geqslant N}$, trouver une absurdité.
2. On ne suppose plus que $F = \mathbb{K}$. Montrer que la condition « $\mathrm{Ker}(u)$ fermé » n'implique pas forcément la continuité de u.

Exercice 19 On pose $E = \mathscr{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ et on note D l'endomorphisme $f \mapsto f'$. Montrer que D n'est pas continue, et ce quelle que soit la norme que l'on met sur E. *Indication : utiliser* $(x \mapsto e^{nx})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 20 *(Centrale-Supélec).* Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on écrit $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ et on pose

$$N_1(P) = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|, \quad N_2(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|, \quad N_3(P) = \int_0^1 |P(t)| \, dt, \quad N_4(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

On a déjà vu que cela définissait des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que la dérivation $P \mapsto P'$ n'est pas continue pour N_1, ni pour N_2, N_3, N_4.

2. $(*)$ Trouver des réels $p_0, p_1, \dots$ de sorte que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} p_k |a_k|$ soit une norme sur E et telle que D soit continu.

Exercice 21 *(Centrale-Supélec, écrits 2020)* Pour tout réel s dans $[0,1]$, on note k_s la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad k_s(t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t \leqslant s, \\ s(1-t) & \text{si } t > s. \end{cases}$$

On note E l'espace $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de $\|\cdot\|_\infty$, et pour tout f dans E, on désigne par $T(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall s \in [0,1], \quad T(f)(s) = \int_0^1 k_s(t) f(t) \, dt.$$

1. Représenter la fonction k_s dans un repère orthonormé, le réel s étant quelconque.
2. Montrer que T est un endomorphisme continu de E.
3. Déterminer $|||T|||$.

Des intégrales généralisées

9

- ✓ Être au point sur le cours de 1re année concernant les intégrales de fonctions continues sur un segment.
- ✓ Savoir expliquer ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un segment, et sur un intervalle quelconque (attention, on a besoin des premières pour expliquer les secondes).
- ✓ Être irréprochable sur les résultats tournant autour du théorème fondamental du Calcul intégral (hypothèses, conclusions...).
- ✓ Avoir compris que pour les fonctions continues par morceaux qui ne sont pas continues, le changement de variable doit — en plus d'être de classe $\mathscr{C}^1$ — être strictement monotone.
- ✓ Savoir définir une intégrale généralisée sur un intervalle quelconque et connaître les intégrales généralisées de référence.
- ✓ Connaître les intégrales faussement généralisées classiques : celles de $x\ln(x)$ et de $\frac{\sin(x)}{x}$.
- ✓ Maîtriser l'outil des relations de comparaison ($\leqslant$, o, O et $\sim$) pour prouver la convergence (ou l'absolue convergence) d'intégrales généralisées.
- ✓ Savoir adapter l'intégration par parties et le changement de variable aux intégrales généralisées.
- ✓ Savoir définir les espaces $\mathbb{L}^1$ et $\mathbb{L}^2$ et connaître leur structure.

- ♠ Dire qu'une fonction par morceaux sur un segment c'est une fonction dont la restriction sur chaque intervalle d'une subdivision est continue : il manque le comportement aux bornes de ces intervalles.
- ♠ Croire que la composée de deux fonctions cpm est une fonction cpm. Un contre-exemple a été donné.
- ♠ Oublier de préciser que f est continue pour écrire $\int |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.
- ♠ Oublier de mettre les bornes dans le bon sens dans l'inégalité triangulaire concernant $\left|\int_a^b f\right|$.
- ♠ Faire des sommes de Riemann sur des intégrales généralisées à des intervalles qui ne sont pas des segments.
- ♠ Croire que la dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $x \mapsto f(x) - f(a)$: c'est l'horreur absolue !
- ♠ Calculer $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ ou pire : $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x$, en calculant une primitive. Le Calcul intégral est avant tout un calcul d'aires, et on espère que vous connaissez celle d'un triangle ou d'un rectangle.
- ♠ Présenter u et v' pour faire une ipp : la bonne rédaction est de présenter u et v, dire qu'elles sont de classe $\mathscr{C}^1$, et annoncer la formule.
- ♠ Oublier de préciser la constance du signe lors des comparaison avec équivalence pour établir la convergence d'intégrales généralisées.
- ♠ Faire des choses compliquées pour établir la convergence d'une intégrale... sur un segment !

9.1 Exercices de base

Exercice 1 *(autour du théorème fondamental du Calcul intégral).*

1. Relever toutes les erreurs, en pointant la plus grave, qui apparaissent dans l'affirmation « Si $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $\mathrm{F}'(x) = f(x) - f(a)$ » ? Corriger cette phrase en présentant tous les objets et les hypothèses nécessaires sur iceux.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue. Si $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, montrer que l'application
$$\Phi : x \longmapsto \int_0^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer $\Phi'(x)$ pour tout réel x.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue. Si $\int_0^{+\infty} f$ converge, montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner sa dérivée.

Exercice 2 Nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^3+\sqrt{t}-1}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin(\vartheta)},$$
$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{ch}(s)}, \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(2-t)}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 1. Justifier que si I est un intervalle borné, alors $\mathbb{L}^2(\mathrm{I},\mathbb{K}) \subset \mathbb{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{K})$.

2. Montrer, si $\mathrm{I} = [1,+\infty[$, qu'il n'y a aucune relation d'inclusion entre $\mathbb{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $\mathbb{L}^2(\mathrm{I},\mathbb{K})$.

Exercice 4 Discuter selon les valeurs du réel α la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5 Grâce à une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

Exercice 6 Grâce au changement de variable $x = 2\mathrm{Arctan}(t)$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(x)}$.

9.2 Les grands classiques

Exercice 7 *(intégrales de Bertrand).* Soit α et β des réels. Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln^\beta(x)} \text{ converge } \iff \Big[\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\Big].$$

En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha |\ln(x)|^\beta}$ converge $\iff \Big[\alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\Big]$.

Exercice 8 *(l'intégrale de Dirichlet).*

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge (on fera une intégration par parties sur $[1,+\infty[$).
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ n'est pas absolument convergente.
   Indication : remarquer que $|\sin(x)| \geqslant \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Exercice 9 *(la fonction Gamma d'Euler).*

1. Montrer que si $\mathfrak{Re}(z) > 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On note $\Gamma(z)$ sa valeur.
2. Déterminer $\Gamma(n)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ en se servant d'une intégration par parties.
3. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ en admettant que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, puis $\Gamma(\frac{n}{2})$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 10 Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x$. *Indication : changement de variable $x = 2t$.*

Exercice 11 Pour tout entier naturel k, montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12 Soit $a > 0$ et $b > 0$.

1. Étudier la convergence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Après avoir déterminé $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, calculer I.

Exercice 13 $(*)$ Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

9.3 Les exercices plus techniques

Exercice 14 (*Centrale*). Déterminer les couples (α, β) dans $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge. Les représenter dans un plan.

Exercice 15 (*Centrale*).

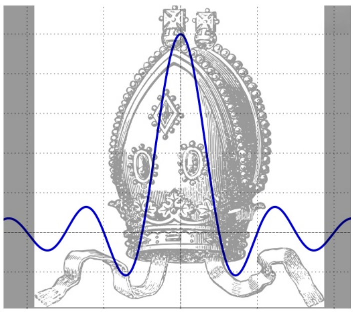
1. Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, et la représenter dans un repère.
2. Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 *(Dirichlet* via *Riemann-Lebesgue).* L'intégrale (dite de Dirichlet) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente. On se propose de trouver sa valeur.

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $\omega > 0$. Grâce à une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega nt}\,\mathrm{d}t = 0$.
2. $(*)$ Montrer que le résultat subsiste pour les fonctions continues par morceaux. *Utilisant la densité des fonctions en escalier vue en MPSI.* Ce résultat s'appelle le *lemme de Riemann-Lebesgue.*
3. Pour tout entier naturel n, on pose
$$\mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que J_n et K_n sont des intégrales convergentes.
4. Montrer que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ est prolongeable par continuité en 0.
5. Exprimer $\mathrm{K}_n - \mathrm{J}_n$ à l'aide de la fonction φ et que $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
6. Conclure grâce au lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 17 $(*)$ *(École Polytechnique).* Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\sin(x)|^x\,\mathrm{d}x$.
Indication : découper suivant $[n\pi,(n+1)\pi]$, observer que $\pi \leqslant 4$ et se servir des intégrales de Wallis : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Johann P. G. Lejeune Dirichlet
(1805-1859)



Le sinus cardinal

De la réduction (partie 2) 10

✓ Connaître le théorème spectral, et savoir caractériser les matrices symétriques dont les valeurs propres sont toutes positives.

✓ Savoir que si $P \in \mathbb{K}[X]$ annule $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors les valeurs de M sont des racines particulières de P.

✓ Savoir énoncer la CNS de diagonalisabilité qui fait intervenir des polynômes annulateurs scindés à racines simples.

✓ Connaître la CNS de trigonalisabilité, qu'il ne faut pas confondre avec la définition !

✓ Savoir que toute matrice (réelle ou complexe) est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

✓ Savoir trigonaliser les matrices 2×2.

✓ Avoir pratiqué 3 ou 4 fois la trigonalisation d'une matrice 3×3. C'est assez technique, et ça ne s'invente pas le jour de la khôlle/du DS.

♠ Se mélanger les pinceaux et dire que si M est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé à racines simples : il suffit de penser à I_n (déjà diagonale...) pour s'apercevoir que c'est une ânerie.

♠ Connaître les CNS de ce chapitre et oublier les définitions : être diagonalisable ce n'est pas avoir un polynôme annulateur scindé à racines simples, c'est être semblable à une matrice diagonale.

♠ Croire que trigonaliser c'est facile, un peu comme diagonaliser en plus court : c'est tout le contraire ! Pratiquez, pratiquez, pratiquez !

♠ Croire qu'une matrice symétrique positive est une matrice symétrique avec des coefficients positifs. C'est un brin plus compliqué que ça.

10.1 Exercices de base

Exercice 1 Expliquer pourquoi toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 2
1. Montrer que $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
2. Montrer qu'elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$, et la réduire.
3. Mêmes questions avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Soit M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas diagonalisable. Montrer qu'il existe un complexe a tel que M est semblable à $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Est-ce vrai dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4 *(Centrale-Supélec, extrait).* Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} -2x+3y & -6x+6y \\ x-y & 3x-2y \end{pmatrix} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrer que E est plan vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ constitué de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5
1. Déterminer les réels a tels que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Si a est un tel réel, trouver P dans $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 6 *(Centrale 2024).* Soit $\mathfrak{N}$ le sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
1. Soit M dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(M) = \det(M) = 0$ si et seulement si M est nilpotente.
2. Montrer que l'application $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathfrak{N}$.

10.2 Matrices symétriques positives

Exercice 7 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{A}^\intercal \times \mathrm{A}$.

Exercice 8 *(CCINP).* Si $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $n = p + q$. On considère A_1 dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, A_2 dans $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ et B dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et on pose

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{B}^\intercal & \mathrm{A}_2 \end{array}\right).$$

On suppose que $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Justifier que A_1 et A_2 sont symétriques définies positives.

Exercice 9 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et M dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{tr}(\mathrm{M}^k)^{\frac{1}{k}} = \max \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M})$.

Exercice 10 *(Centrale 2023).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et soit A et B dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. On suppose $\mathrm{A} \neq 0$.

1. Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $[\mathrm{A}]_{i,i} \geqslant 0$. Montrer de plus que $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]$, $a_{i_0,i_0} > 0$.
2. Démontrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) \geqslant 0$.

Exercice 11 *(Mines-Ponts).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$, A dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B anticommutent, c'est-à-dire $\mathrm{AB} = -\mathrm{BA}$. Montrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 0$. *Indication. Traiter d'abord le cas où* A *est diagonale.*

Exercice 12 *(Racines carrées dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe R dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{R}^2 = \mathrm{A}$.
2. On veut mieux faire : on considérant un polynôme interpolant les points $(\lambda, \sqrt{\lambda})$ quand λ décrit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$, montrer que R peut être choisie dans $\mathbb{R}[\mathrm{A}]$.
3. Soit R' dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $(\mathrm{R}')^2 = \mathrm{A}$. Montrer que R et R' commutent, puis que $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$.

Exercice 13 Écrire les expressions suivantes sous la forme $\mathrm{X}^\intercal\mathrm{SX}$ avec S symétrique et X matrice colonne. Reconnaître celles qui gardent un signe constant.

1. $q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Tracer l'ensemble $\mathscr{E}_1 : q_1(x, y) = 1$.
2. $q_2(x, y) = -3x^2 + 4xy + y^2$. Tracer l'ensemble $\mathscr{E}_2 : q_2(x, y) = 1$.
3. $q_3(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xz$. Tracer l'ensemble $\mathscr{E}_3 : q_3(x, y, z) = 1$.

Exercice 14 Grâce à un développement limité à l'ordre 2, trouver la nature des points critiques des fonctions suivantes.

$$f : (x, y) \longmapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \qquad \text{et} \qquad g : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy.$$

Exercice 15 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On définit une relation binaire $\prec$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \mathrm{A} \prec \mathrm{B} \iff \mathrm{B} - \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est-elle totale ?

Exercice 16 *(Rayon spectral).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\rho(\mathrm{A}) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})\}$.

1. Justifier la bonne définition de $\rho(\mathrm{A})$ quelle que soit la matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On considère l'endomorphisme canoniquement associé $u_{\mathrm{A}} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, et on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ définie par $\|\mathrm{X}\|_2 = \sqrt{\mathrm{X}^\intercal\mathrm{X}}$. Démontrer que $|||u_{\mathrm{A}}||| = \sqrt{\rho(\mathrm{A}^\intercal\mathrm{A})}$.

Rappel. On note $|||u_{\mathrm{A}}|||$ la constante de Lipschitz de u_{A}, c'est-à-dire $\sup\limits_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\|\mathrm{AX}\|_2}{\|\mathrm{X}\|_2}$.

Indication. Remarquer que $\mathrm{A}^\intercal\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. *Quelles sont ses valeurs propres en fonction de celles de* A *?*

Exercice 17 *(Mines-Ponts).* Si $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et donc $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$. On considère une matrice A de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et un vecteur B dans $\mathbb{R}^n$. On pose, pour tout X dans $\mathbb{R}^n$, $f(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{A}\mathrm{X} - \mathrm{B}^\mathsf{T}\mathrm{X}$.

1. Calculer le gradient de f. Montrer que f admet un point critique et qu'il est unique.
2. Montrer que f admet un minimum, et le calculer.

10.3 Les grands classiques

Exercice 18 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Si M est symétrique, démontrer que $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}$.
2. Si M est antisymétrique, démontrer que $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{M}) \subset i\mathbb{R}$.
3. Si M est antisymétrique et inversible, justifier que n est pair, que M^2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puis que M l'est sur $\mathbb{C}$.
4. Donner un exemple de matrice antisymétrique réelle non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 Soit n un entier au moins égal à 2.

1. Si une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\mathrm{M}^k = \mathrm{I}_n$ pour un certain entier non nul k, montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que ce résultat est faux pour les matrices réelles, par exemple si $n = 2$.
3. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ et M dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que M^k soit diagonalisable. Montrer que M l'est aussi. *On commencera par montrer que* M^k *possède un polynôme annulateur* P *à racines simples tel que* $\mathrm{P}(0) \neq 0$.
4. Montrer que ce résultat est faux si M n'est pas inversible.

Exercice 20 *(Centrale-Supélec).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{L_A}$ l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\mathrm{L_A}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$ (c'est la multiplication à *gauche* par A).

1. Montrer que A est inversible si et seulement si $\mathrm{L_A}$ est bijective.
2. Montrer que A et $\mathrm{L_A}$ ont même spectre.
3. Après avoir calculé $(\mathrm{L_A})^k$ pour tout entier k, montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{L_A}$ l'est.

Exercice 21 *(Art & Métiers).* Soit n un entier au moins égal à 2. On considère l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} - \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n. \end{array}$$

1. Détailler $\Psi \circ \Psi$ et trouver un polynôme annulateur de Ψ.
2. Montrer que Ψ est diagonalisable, déterminer ses éléments propres et en déduire $\mathrm{tr}(\Psi)$ et $\det(\Psi)$.

Exercice 22 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer les éléments A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{A} \end{array}\right)$ soit diagonalisable. *On commencera par calculer les puissances de cette matrice.*

Exercice 23 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^k) = 0$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que M est nilpotente.

Exercice 24 *(matrices circulantes).* Soit n un entier au moins égal à 2. On note J la matrice de format $n \times n$ suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

1. À l'aide de l'endomorphismes associé, calculer J^n et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le spectre complexe et les espaces propres de J.
3. Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des complexes, calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Indication : on pourra exprimer cette matrice comme un polynôme en J.

10.4 Exercices plus techniques

Exercice 25 *(Centrale-Supélec, extrait).* On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, et on suppose que $\alpha \neq \beta$. Si $\mathrm{B} + z\mathrm{A}$ est diagonalisable pour tout complexe z, montrer que B est diagonale.

Exercice 26 *(Centrale-Supélec).*

1. Soit M dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}) \subset \{0\}$. Est-ce que M est forcément nilpotente ?
2. Soit M dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}) = \{0\}$. Est-ce que M est forcément nilpotente ?
3. Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la somme de matrices dont le spectre est inclus dans $\{0\}$.

Exercice 27 *(Centrale-Supélec, extrait).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle classe de similitude de A l'ensemble des matrices qui sont semblables à A : c'est $\{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \mid \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$.

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, quelle est la classe de similitude d'une matrice de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$?
2. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que sa classe de similitude est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que quelle que soit A, la classe de similitude de A n'est jamais une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Indication : un sous-espace affine d'un EVN* E*, distinct de* E*, n'est jamais une partie ouverte.*

Exercice 28 *(caractérisation topologique de la nilpotence, École polytechnique).* Soit n un entier au moins égal à 2.

1. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe P_ε dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}_\varepsilon^{-1}\mathrm{AP}_\varepsilon$ soit une triangulaire supérieure $\mathrm{T} = (t_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où $|t_{i,j}| \leqslant \varepsilon$ pour tous $i < j$ dans $[\![1, n]\!]$.
2. Pourquoi ne peut-on rien imposer aux coefficients $t_{i,i}$?
3. En déduire que A est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à la classe de similitude de A, c'est-à-dire à l'ensemble $\{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \mid \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

Exercice 29 *(caractérisation topologique de la diagonalisabilité, École polytechnique).* Soit n dans N^* et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\Sigma_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ sa classe de similitude : $\{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \mid \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

1. Montrer que si A est diagonalisable, alors $\Sigma_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ est fermée.
2. Grâce à l'exercice précédent, montrer la réciproque.
3. Cette caractérisation est fausse dans $\mathbb{R}$, et nous allons le monter.
   (a) Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire telles qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$. Montrer qu'elles sont semblables sur $\mathbb{R}$. *Indication. On posera* $\mathrm{P} = \mathrm{Q} + i\mathrm{R}$ *avec* Q, R *réelles et on utilisera la fonction polynôme* $x \mapsto \det(\mathrm{Q} + x\mathrm{R})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $\Sigma_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$ est fermée mais n'est pourtant pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30 *(endomorphismes semi-simples, Centrale-Supélec 2024).* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (non nulle). Un endomorphisme u de E est dit *semi-simple* quand tout sous-espace vectoriel stable par u possède un supplémentaire stable par u.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que M est semi-simple si l'endomorphisme canoniquement associé à M est semi-simple.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semi-simple, mais pas $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On suppose dorénavant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   (a) Soit u un endomorphisme diagonalisable. Montrer que u est semi-simple. *On pourra justifier la complétion d'une famille libre quelconque par des vecteurs propres de u pour qu'elle devienne une base de tout l'espace.*
   (b) On suppose que u est semi-simple et on pose $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Après avoir justifié que F était stable par u et considéré un certain endomorphisme induit, montrer que u est diagonalisable.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un endomorphisme semi-simple est-il toujours diagonalisable ?

Des suites et des séries de fonctions 11

- ✓ Avoir compris les différences entre convergence uniforme et convergence simple, et savoir illustrer graphiquement une convergence uniforme.
- ✓ Savoir montrer qu'une convergence n'est pas uniforme par plusieurs moyens (cf. méthodes).
- ✓ Savoir établir la convergence normale d'une série de fonctions.
- ✓ Savoir intervertir limites, intégrales, dérivées, sommes avec les hypothèses idoines.
- ✓ Utiliser à bon escient la convergence uniforme (ou normale) sur tout segment, pour prouver une continuité par exemple.

- ♠ Croire que la convergence sur tout segment entraîne la convergence uniforme globale.
- ♠ Essayer de montrer qu'une suite de fonctions converge normalement : ce mode de convergence est propre aux séries de fonctions.
- ♠ Oublier de regarder en premier la convergence normale d'une série de fonctions : c'est bien plus facile que la convergence uniforme.
- ♠ Ne pas penser à établir une convergence uniforme/normale sur tout segment, voire sur toute partie de la forme $[a, +\infty[$, pour montrer une continuité par exemple.

11.1 Exercices de base

Exercice 1 Pour chaque entier naturel non nul n, on note f_n la fonction $\begin{array}{rcl} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & n^\alpha \sin^n(t)\cos(t) \end{array}$, où α est un paramètre réel.

1. Montrer que, quel que soit α, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$. *Indication : on pourra étudier les variations de f_n.*
3. Caractériser les réels α tels que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$

1. Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-a, a]$.

Exercice 3 Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où, pour tout entier naturel non nul n, f_n est la fonction $x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}$.

Exercice 4 Pour tout entier n, on pose $f_n = x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$, puis la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, où $a > 0$.
2. La CVU sur tous les intervalles $[a, +\infty[$ quand $a > 0$ entraîne-t-elle la CVU sur $]0, +\infty[$?

Exercice 5 *(pas d'interversion).* Pour tous n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et x dans $[0, 1]$, on pose

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} n^2 x & \text{si} & 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si} & \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si} & \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{array} \right.$$

1. Représenter f_n pour quelques valeurs de n, et justifier que f_n est continue pour tout n.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$.
3. Montrer que l'interversion limite-intégrale n'a pas lieu. Qu'en conclure ?

Exercice 6 Pour chaque n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $f_n = x \mapsto \frac{1}{x^2+n^2}$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *(une hypothèse manquante).* Pour chaque n dans $\mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (*CCINP.*) Justifier qu'on définit une fonction continue sur $[0,1]$ en posant

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right),$$

puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \psi(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 9 Pour chaque entier n, on pose $f_n = x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+x}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Grâce au théorème de la double limite, prouver que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $]0,m]$ où $m > 0$ est quelconque.

Exercice 10 *(Centrale 2023).* Soit I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément localement vers une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$. Soit aussi deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I convergeant respectivement vers ℓ et ℓ', deux éléments de I. Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{u_n}^{v_n} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{\ell}^{\ell'} f(t)\mathrm{d}t.$$

11.2 Les grands classiques

Exercice 11 *(convergence d'un produit).* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur I vers f et g respectivement , montrer que $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg.
2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur I, montrer que ce n'est pas forcément le cas pour $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Indication : prendre $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}$ et $g_n : x \mapsto x$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.*
3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur I vers f et g respectivement et si f et g sont **bornées** sur I, montrer que $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers fg.

Exercice 12 Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales, définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Montrer qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{P}_\mathrm{N}(x) - \mathrm{P}_n(x)| \leqslant 1$.
2. En déduire que f est nécessairement polynomiale.

Remarque. Ce résultat est faux sur un segment : on peut montrer que toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiale (théorème dû à Weierstrass).

Exercice 13 On admet que sur un **segment**, toute fonction continue est limite uniforme de fonctions polynomiales (cf. exercice précédent). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_a^b t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout entier n. Montrer que $f = 0$.

Exercice 14 Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales dont tous les degrés sont majorés par un entier d, toutes définies sur un intervalle I quelconque (mais de longueur non nulle). On suppose que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f.

1. Montrer que f est une fonction polynomiale de degré au plus d. *On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.*
2. Prouver que la convergence de $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est en fait uniforme sur tout segment.
3. On suppose que I n'est pas borné et que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I. Montrer qu'il existe une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que l'on ait $\mathrm{P}_n = f + c_n$ pour tout n suffisamment grand.

11.3 Exercices plus techniques

Exercice 15 Pour tout (n, x) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement sur $\mathbb{R}_+$ mais pas globalement.
3. En se servant de l'inégalité $t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ valable pour tout réel positif t, montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[0, a]$, où $a > 0$.
4. On souhaite montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Pour ce faire, on considère $\varepsilon > 0$ quelconque.
   (a) Justifier qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathrm{e}^{-a} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
   (b) Montrer alors il existe un entier N_1 tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_1$, $\|g_n - g\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$.
   (c) En utilisant 3., montrer qu'il existe un entier N_2 tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_2$, $\|g_n - g\|_{\infty,[0,a]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et conclure.

Exercice 16 Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Préciser le sens de variation de S.
3. Établir que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{S}(x+1) + \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x}$.
4. En déduire un équivalent simple de S en 0, puis en $+\infty$.

Exercice 17 *(CentraleSupélec).* On admet que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (série absolument convergente). Le but est de montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^z = \lim_{p\to\infty} \left(1 + \frac{z^p}{p}\right)^p.$$

1. Démontrer ce résultat quand $z \in \mathbb{R}$ en utilisant la fonction ln.
2. Développer $\left(1 + \frac{z^p}{p}\right)^p$ par la formule du binôme.
3. On fixe $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose
   $$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k} \quad \text{si } x \geqslant k$$
   et 0 sinon. Étudier la limite de $(f_k(p))_{k\in\mathbb{N}}$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$ fixé.
4. Établir la convergence normale de $\sum f_k$ sur $\mathbb{R}_+$ et conclure par le théorème de la double limite.

Exercice 18 *(CentraleSupélec, extrait).* On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & 2x(1-x) \end{array}$$

et on pose $f_n = f \circ \ldots \circ f$ (n fois) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence simple sur $[0, 1]$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et justifier qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$.
2. Prouver néanmoins qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0, 1[$.

Des espaces probabilisés

12

- ✓ Savoir montrer qu'un ensemble est dénombrable en construisant une bijection de $\mathbb{N}$ vers cet ensemble.
- ✓ Connaître les ensembles dénombrables usuels : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et savoir que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (donc $\mathbb{C}$ non plus, il va sans dire...)
- ✓ Savoir qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- ✓ Savoir définir ce qu'est une tribu sur un ensemble non vide.
- ✓ Savoir prouver qu'une partie est un événement en utilisant des intersections/réunions dénombrables et des complémentaires.
- ✓ Avoir compris que sur un univers dénombrable, on peut identifier les mesures de probabilité avec une suite (p_n) de réels positifs de somme égale à 1.
- ✓ Bien maîtriser les propriétés fondamentales des probabilités qui sont nouvelles cette année : continuité croissante ou décroissante et sous-additivité.
- ✓ Connaître le langage des probabilités conditionnelles, des événements indépendants, des systèmes complets dénombrables.
- ✓ Savoir utiliser la formule de Bayes après avoir décrit un système complet dénombrable d'événements adapté au problème.

- ♠ Ne pas avoir compris ce que signifie $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Les éléments de $\mathscr{T}$ sont des parties de Ω, pas des éléments de Ω !
- ♠ Croire qu'une mesure de probabilité est une fonction de Ω dans $[0,1]$: c'est une fonction de $\mathscr{T}$ (une tribu) dans $[0,1]$.
- ♠ Confondre « incompatibles » et « indépendants ».
- ♠ Croire que l'indépendance mutuelle d'événements $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ se traduit par $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \ldots \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$: il faut en plus considérer *toutes* les sous-familles finies quelconques de la liste $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$.
- ♠ Croire que « A sachant B » est un événement. Cette expression est trompeuse car on parle de la « probabilité de A sachant B ». Il faut avoir compris que cela désigne la probabilité de A pour une mesure de probabilité notée P_B. En aucun cas l'écriture (très dangereuse) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$ signifie que l'on prend la probabilité d'un soi-disant événement « A | B ».

12.1 Ensembles dénombrables. Tribus

Exercice 1 Déterminer toutes les tribus possibles sur l'ensemble $\{a, b, c\}$.

Exercice 2 Expliquer pourquoi $\mathbb{R}$ peut-être considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, puis justifier que la dimension de cet espace n'est pas de dimension finie.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Quel théorème justifie l'existence d'une limite à gauche et à droite de f en tout point ?
2. On note E l'ensemble des points de discontinuité de f. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathbb{Q}$. Qu'en déduire sur E ?

Exercice 4 *(CentraleSupélec, extrait).* On appelle *nombre algébrique* (sur $\mathbb{Q}$) tout nombre complexe qui est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

1. Expliquer pourquoi les nombres $\frac{2}{3}$, i, $\sqrt[2025]{2}$, et $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ sont algébriques.
2. On note A_n l'ensemble des nombres algébriques qui sont racines des polynômes de $\mathbb{Q}_n[\mathrm{X}] \setminus \{0\}$. Montrer que A_n est dénombrable, et en déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
3. En déduire alors qu'il existe (beaucoup) de nombres transcendants, c'est-à-dire non algébriques.

Exercice 5 Soit E un ensemble quelconque.

1. Rappeler pourquoi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers n'est pas dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}_*(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

3. En déduire que l'ensemble des suites strictement croissantes d'entiers naturels n'est pas dénombrable.

Exercice 6 *(une application topologique de la dénombrabilité).* Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace normé. Une partie A de E est dite *connexe par arcs* quand pour chaque couple (a, b) de A^2, il existe un arc continu $\gamma : [0,1] \to \mathrm{A}$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

1. Démontrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs dans l'espace normé $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, mais que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. On souhaite montrer que si D est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$, alors $\mathbb{C} \setminus \mathrm{D}$ est connexe par arcs.
   (a) Soit z dans $\mathbb{C}$. Justifier qu'il existe une infinité indénombrable de droites tracées dans $\mathbb{C}$, passant par z.
   (b) En déduire qu'il existe au moins une droite passant par z ne rencontrant pas D. *On pourra écrire* D *sous la forme* $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ *et raisonner par l'absurde.*
   (c) Conclure.
3. Une application. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. *Si* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$, *on pourra considérer* $z \mapsto \det((1-z)\mathrm{A} + z\mathrm{B})$.

12.2 Familles sommables

Exercice 7 Montrer que la famille $\left(\frac{1}{q^2}\right)_{q \in \mathbb{Q} \cap [1,+\infty[}$ n'est pas sommable. *On pourra s'intéresser aux rationnels compris entre 1 et 2 : combien en y a-t-il ?*

Exercice 8 La fonction zêta d'Euler-Riemann est donnée par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ pour tout $x > 1$.

1. Grâce au théorème de Fubini, démontrer que $\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1$.
2. Retrouver le fait que $\lim_{+\infty} \zeta = 1$.

Exercice 9 Soit $\alpha > 1$. Pour tout entier n, on pose $\mathrm{R}_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (reste d'une série de Riemann).

1. Donner un équivalent de $(\mathrm{R}_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ grâce à une comparaison série-intégrale. En déduire les valeurs de α pour lesquelles cette famille est sommable.
2. Pour de telles valeurs de α, montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{R}_n(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Exercice 10 *(Mines-Ponts)* On rappelle que la fonction zêta est définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et que la suite $\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente : on note γ sa limite (constante d'Euler). Démontrer que $\gamma = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ puis que $\gamma = 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}$.

12.3 Exercices de base

Exercice 11 *(la question du chevalier de Méré (1607-1684)).* Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé, ou bien obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 12 Soit P une mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(\{n\}) = 0$.

Exercice 13
1. Montrer que l'on peut définir une mesure de probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ en imposant $\mathrm{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$ pour tout entier n.

2. Si $k \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité qu'un entier choisi au hasard soit un multiple de k ?

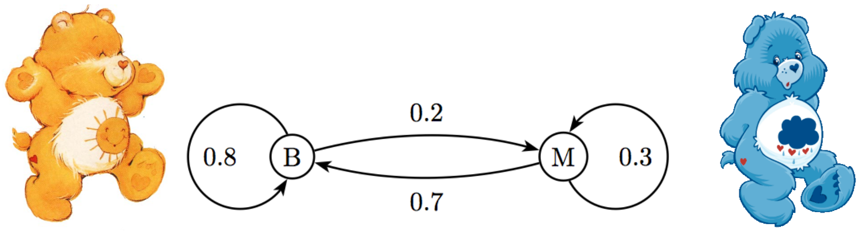
Exercice 14 On lance un dé à 6 faces équilibré et on s'arrête à l'obtention du premier 6. On admet que l'univers $[\![1,6]\!]^{\mathbb{N}^*}$ est muni d'une structure probabilisée $(\mathscr{A}, \mathrm{P})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in [\![1,6]\!]^n$, la partie $\{\omega_1\} \times \ldots \{\omega_n\} \times [\![1,6]\!]^{[\![n+1,+\infty[\![}$ est un événement de probabilité $\frac{1}{6^n}$.

1. Montrer que « s'arrêter de jouer un jour » est un événement et qu'il est presque sûr.
2. Quelle est la probabilité, une fois le jeu fini, de n'avoir obtenu que des nombres pairs ?

Exercice 15 *(introduction aux chaînes de Markov).* Au pays des Bisounours, il fait souvent un temps ensoleillé. De plus,

- s'il fait beau, il y a 80 % de chance qu'il fasse encore beau le lendemain.
- s'il ne fait pas beau, il y a 30 % de chance qu'il fasse encore moche le lendemain.

Pour chaque entier n, on note p_n la probabilité qu'il fasse beau le n^{e} jour au pays des Bisounours. On schématise la situation par un graphe pondéré :



où B et M sont les deux *états* (Beau et Moche).

1. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
2. Si on décide d'aller, un jour lointain, au pays des Bisounours, quelle chance a-t-on d'avoir du beau temps ?

Exercice 16 Vous venez de passer un test pour le dépistage d'une maladie rare, qui atteint 3 % de la population. Hélas le test est positif et le médecin vous dit : « Chez les personnes atteintes, le test est positif dans 90 % des cas ; chez les sujets sains, il est négatif dans 95 % des cas ». Quelle est la probabilité que vous ayez vraiment cette maladie ?

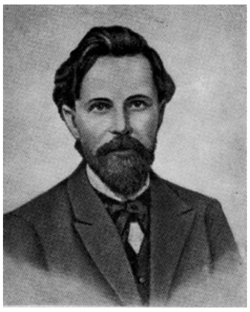
Exercice 17 La *malculopathie* est un mal qu'un professeur de mathématiques peut dépister en donnant une page de calcul à ses étudiants. On a constaté qu'un étudiant atteint de ce mal fait plus de trois erreurs dans cette page dans 99 % des cas. Un étudiant non atteint fait plus de trois fautes dans 1 % des cas. On note p la probabilité qu'un individu soit atteint de malculopathie. Le test sera jugé fiable si au moins 99 % des personnes qui font plus de trois fautes sont effectivement atteintes.
Que doit vérifier p pour que le test soit fiable ?

Exercice 18 *(encore des chaînes de Markov).* La vie de Tinker est très difficile : manger à sa gamelle, dormir, chasser les souris (pour jouer, car il ne les mange jamais).

- Après avoir mangé, Tinker ne pense qu'à une seule chose : dormir.
- Après avoir chassé les souris, Tinker a faim les trois quarts du temps et sinon, il dort.
- Après avoir dormi, Tinker est partagé entre manger six fois sur dix, chasser les souris une fois sur dix, ou dormir encore.

On note m_n, d_n, c_n les probabilités que Tinker mange, dorme, chasse respectivement, à l'étape n.

1. Représenter la situation par un graphe pondéré (cf. exercice sur le monde des Bisounours).
2. Si on note X_n le vecteur-colonne dont les composantes sont m_n, d_n, c_n, donner une relation matricielle entre X_{n+1} et X_n et en déduire X_n en fonction de X_0 et de n.
3. Si, dans un jour lointain, on cherche Tinker, quelle est la probabilité que ce gros paresseux dorme ?

Andreï Markov (1856-1922) — Tinker (2013-)

Exercice 19 *(utilisation d'une loi de Poisson).* On étudie une population d'êtres humains. Des statistiques ont établi que pour tout entier n, la probabilité qu'une famille ait n enfants est donnée par la formule

$$p_n = k\frac{2{,}1^n}{n!}$$

où k est une constante.

1. Déterminer la constante k.
2. On suppose qu'un enfant naît avec une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être une fille.
   (a) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.
   (b) On suppose que parmi les enfants d'une famille il n'y a qu'une seule fille. Quelle est la probabilité que cette famille possède deux enfants ?
3. Proposer un moyen de calculer le nombre moyen d'enfants par famille.

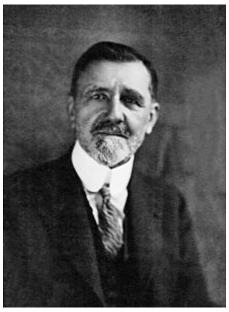
12.4 Les grands classiques

Exercice 20 1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. Interpréter géométriquement.

2. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
   (a) Montrer que « aucun des A_n n'est réalisé » représente bien un événement : on le notera B.
   (b) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) \leqslant \exp\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)\right)$ (avec la convention $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$).

Exercice 21 *(loi du 0-1 de Borel).* Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. On pose $\mathrm{A}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{A}_k$.

1. Justifier que A^* est un événement et que $\omega \in \mathrm{A}^*$ si et seulement s'il existe une infinité de n pour lesquels $\omega \in \mathrm{A}_n$. *Indication : une partie de* $\mathbb{N}$ *est finie ssi elle est majorée.*
2. (lemme de Borel-Cantelli). On suppose que $\sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ converge. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}^*) = 0$: il est donc presque impossible qu'une infinité de A_n se réalisent.
   Indication : on posera $\mathrm{B}_n = \bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{A}_k$ *et la continuité décroissante.*
3. On suppose maintenant que les A_n sont indépendants et que $\sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}^*) = 1$: il est donc presque certain qu'une infinité de A_n se réalisent.
   Indication : on calculera $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}^*})$ *grâce à l'exercice précédent.*



Émile Borel
(1871-1956)

Francesco Paolo CANTELLI
(1875-1966)

Exercice 22 Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $k\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples (strictement positifs) de k. Si on choisit un entier « au hasard », il semble intuitif que

— la probabilité qu'il soit pair est de $\frac{1}{2}$,
— la probabilité qu'il soit un multiple de 3 est de $\frac{1}{3}$,
— la probabilité qu'il soit dans $k\mathbb{N}$ est de $\frac{1}{k}$.

Nous allons pourtant montrer **qu'il n'existe pas** de mesure de probabilité P sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\mathrm{P}(k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{k}$ pour tout k. Pour cela, nous admettrons que si $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ désigne la suite croissante des nombres premiers, alors $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge (cf. exercice 23 pour une preuve). Imaginons donc, un instant, qu'une telle mesure P existe.

1. Montrer que les événements $p_k\mathbb{N}^*$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendants.
2. Déterminer l'événement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geqslant n} p_k\mathbb{N}^*$ (cf. exercice 21 question 1).
3. En utilisant l'exercice 21 (loi 0-1 de Borel), trouver une contradiction.

12.5 Les exercices plus techniques

Exercice 23 *(loi de Zipf, Centrale-Supélec).* Si $s \in]1, +\infty[$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Soit $s > 1$. Justifier qu'il exite une unique mesure de probabilité P_s sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\mathrm{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\mathrm{P}_s(k\mathbb{N}^*)$ si $k \in \mathbb{N}^*$.
3. On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. Vérifier que les événements $p_k\mathbb{N}^*$ sont indépendants.
4. En étudiant $\mathrm{P}_s(\{1\})$, montrer l'identité d'Euler
$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}.$$
5. En se servant du fait que $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$ (démontré au chap. 11), montrer ce que l'on a admis à l'exercice 22, à savoir : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$.

13 Des séries entières

✓ Savoir démontrer le lemme fondamental d'Abel, et avoir compris qu'il permet de caractériser le rayon de convergence d'une série entière : avant lui, il y a CVA, après lui, il y a DVG.

✓ Savoir trouver un rayon de convergence en utilisant sa définition (avec un sup).

✓ Connaître les réflexes sans lesquels le moindre exercice sur les séries entières donne mal à la tête. Par exemple, si (a_n) est bornée, le rayon de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Encore un exemple : si $\sum a_n z_0^n$ diverge, on peut dire que $\mathrm{R}_a \leqslant |z_0|$.

✓ Savoir quoi dire du rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

✓ Savoir expliquer pourquoi une fonction série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, et savoir exprimer ses dérivées.

✓ Utiliser une série entière pour résoudre une équation différentielle linéaire.

♠ S'emmêler les pinceaux entre série numérique, série entière (qui est une série de fonctions, mais que l'on note comme une série numérique !) et somme d'une série entière (qui est une fonction).

♠ Appliquer la règle de D'Alembert sur une série lacunaire.

♠ Se précipiter sur D'Alembert en oubliant la définition même du rayon de convergence : il est élémentaire de trouver le rayon de $\sum z^n$ ou de $\sum 3^n z^n$ sans déranger D'Alembert. Vous impressionnerez positivement vos khôlleurs si vous appliquez cette remarque.

♠ Croire qu'une série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur son intervalle ouvert de convergence : c'est en général faux, il n'y a que CVN sur tout segment $[-r, r]$ inclus dans cet intervalle.

♠ Croire que si la somme f d'une série entière $\sum a_n x^n$ est continue en R_a, alors la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{R}_a^n$ existe. Penser à $\sum (-1)^n x^n$ dont la somme est $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ (ici $\mathrm{R}_a = 1$).

♠ Se tromper dans l'expression des dérivées k-ième de la somme d'une série entière, notamment si ladite série est lacunaire.

13.1 Exercices de base, rayon et somme de séries entières

Exercice 1 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R}_a > 0$.

1. On suppose qu'il existe z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $|z_0| = \mathrm{R}_a$ et $\sum a_n z_0^n$ converge **absolument**. Montrer que $\sum a_n z^n$ converge sur tout le cercle de convergence.
2. Expliquer pourquoi le caractère *absolu* de la convergence de $\sum a_n z_0^n$ est indispensable.

Exercice 2 Soit F une fonction rationnelle non nulle. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{F}(n) z^n$.

Exercice 3 Déterminer les rayons de convergence des séries entières proposées.

$$\sum n^{(-1)^n} z^n, \quad \sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n, \quad \sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n, \quad \sum n! z^n, \quad , \sum n! z^{n^2}, \quad \sum \binom{2n}{n} z^n,$$

$$\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) z^n, \quad \sum \sin(\mathrm{e}^{-n}) z^n, \quad \sum \sin(n) z^n, \quad \sum \frac{\sin(n)}{n^2} z^n.$$

Exercice 4 Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum n^2 x^n$.

Exercice 5 Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum \frac{x^n}{2n+1}$ sur $]0, 1[$, puis sur $]-1, 0[$.

Exercice 6 *(séries lacunaires)*

1. On note R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^{kn}$ est $\sqrt[k]{\mathrm{R}_a}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum z^{(n^2)}$.

Exercice 7 Grâce à une série entière, trouver la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(4n+2)}$.

Exercice 8 Pour tout entier n, on note a_n la n^{e} décimale de $\sqrt{2}$.

1. Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum a_n x^n$.
2. Déterminer l'intervalle de définition de sa somme.
3. Et si on remplace $\sqrt{2}$ par $\frac{1}{3}$? Et par $\frac{1}{4}$?
4. Déterminer la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ où a_n est la n^{e} décimale de $\frac{32}{99} = 0,3232\underline{32}\ldots$.
5. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer que la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ où a_n est la n^{e} décimale de r et une fonction rationnelle.

Exercice 9 *(une croyance tenace, CentraleSupélec extrait).*

1. Donner un exemple de série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence égal à 1 telle que $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existe et est finie mais telle que $\sum a_n$ diverge.
2. On suppose ici que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon 1 et que $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existe et est finie. Montrer cette fois que $\sum a_n$ converge.

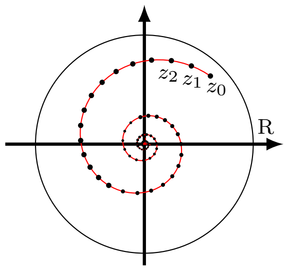
13.2 Les grands classiques

Exercice 10 *(formule de Cauchy et théorème de Liouville).* Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe dont le rayon de convergence R est non nul. On note f sa somme.

1. Montrer que $\forall r \in \,]0, \mathrm{R}[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$.
2. On suppose que $\mathrm{R} = +\infty$ (on dit que f est une *fonction entière*) et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Déduire de la formule de Cauchy que f est constante (théorème de Liouville).
3. Donner un exemple de fonction entière **réelle** qui est bornée sur $\mathbb{R}$ et cependant non constante.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Joseph Liouville (1809-1882)



Principe des zéros isolés

Exercice 11 *(principe des zéros isolés).* Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon non nul R. On suppose qu'il existe une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de complexes **non nuls** de $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ f(z_k) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} z_k = 0.$$

1. Montrer alors que f est constamment nulle sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.
Indication. Si f n'était pas nulle, il existerait un entier p tel que $a_p \neq 0$. On aura tout intérêt à considérer le plus petit entier vérifiant cela.
2. En déduire que si f s'annule sur tout un intervalle de la forme $]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, alors $f = 0$.
3. Application. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{2026} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ n'est pas DSE_0.

Exercice 12 *(Mines-Ponts)* Soit p un entier non nul et A dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{tr}(\mathrm{A}^n)z^n$, puis sa somme en fonction de χ_{A}. *Indication : toute matrice complexe est trigonalisable).*

Exercice 13 $(*)$ *(École polytechnique).* On pose $\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ pour tout entier n. On rappelle que $\mathrm{W}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (formule de Wallis, cf. chap. 3 dans la preuve de la formule de Stirling).

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{W}_n x^n$.
2. Déterminer sa somme. *Indication : on sera amené à faire un changement de variable* $u = \tan(\frac{t}{2})$.

13.3 Fonctions DSE_0

Exercice 14 Grâce à la théorie des séries entières, montrer que la fonction sinus cardinal $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ (complétée en 0 par 1) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On veut montrer que f n'est pas DSE_0 de deux façons différentes.

1. Montrer que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$. Conclure.
2. Trouver les zéros de f. Conclure avec l'exercice 11.

Exercice 16 Déterminer le DSE_0 de $\sin^2(x)$. *Indic. Utiliser une formule de Trigonométrie.*

Exercice 17 Déterminer le DSE_0 de $\ln(1+x+x^2)$. *Indic. Remarquer une progression géométrique.*

Exercice 18 *(équation de Bessel, Centrale).* Pour chaque réel $\nu \geqslant 0$, on considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_\nu) \ : \ t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution de (E_0), notée J_0, qui soit DSE_0 et telle que $\mathrm{J}_0(0) = 1$.
2. Montrer qu'il existe des solutions qui ne sont pas DSE_0 de (E_0). *On pourra se servir du théorème de Cauchy linéaire.*
3. On revient au cas général : $\nu \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E_ν), notée J_ν, de la forme $t \mapsto t^\nu \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ avec $a_0 = 1$.

Exercice 19 Soit $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}^2(x)$. Grâce à une EDL2 vérifiée par f, montrer que f est DSE_0 et déterminer son développement.

Exercice 20 *(une fonction plate).* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ainsi, f est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Reste à l'étudier au voisinage de 0.

1. Montrer pour tout entier k, il existe un polynôme P_k tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{P}_k(x)}{x^{2k}}\mathrm{e}^{-1/x^2}$.
2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. *Indication : on utilisera le théorème de la limite de la dérivée vu en première année.*
3. Montrer que f n'est pas développable en série entière, bien que sa série de Taylor-Maclaurin $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ait un rayon infini.

Exercice 21 *(une série entière célèbre, Centrale 2024).* On considère $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Justifier que f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ DSE en 0, et donner $\tilde{f}^{(n)}(0)$ pour tout n.

2. Montrer que $\frac{1}{f}$ est DSE en 0 avec un rayon $\mathrm{R} \geqslant 1$. *Indication : faire une anaylse-synthèse et montrer que les coefficients b_n du DSE de $\frac{1}{f}$ vérifient $|b_n| \leqslant 1$.*
3. En considérant la série entière complexe $\sum b_n z^n$, justifier que $\mathrm{R} \leqslant 2\pi$.

Exercice 22 Grâce à la théorie des séries entières, déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 23 $(*)$ *(Intégrale de Dirichlet, Centrale-Supélec).*

1. Rappeler pourquoi $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction DSE_0 et donner son développement.
2. Soit $a > 0$ fixé. En servant du DSE_0 de e^z avec $z = -a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, montrer que
$$\mathfrak{Re} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} .$$
3. Exprimer $\int_0^a \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ sous forme d'une série et en déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$.

13.4 Séries entières et dénombrement

Exercice 24 *(Nombre de dérangements.* Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble (le groupe !) des permutations de $[\![1, n]\!]$. On appelle *dérangement* de $[\![1, n]\!]$ tout élément σ de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$. Par convention $\mathrm{D}_0 = 1$. On considère la série entière $\sum \frac{\mathrm{D}_n}{n!} z^n$, appelée *série génératrice exponentielle* associée à la suite (D_n).

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Justifier que $\sum \frac{\mathrm{D}_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence non nul, et minorer ce rayon.
3. Expliquer pourquoi $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_k$. *Indication : compter les permutations en les rangeant par nombre de points fixes.*
4. En déduire que la somme de cette série entière est $z \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{1-z}$ et que $\mathrm{D}_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
5. Cent personnes se rendent à une soirée mondaine, où le *dress code* est smoking et chapeau haut de forme. Tous laissent leur chapeau au vestiaire. La soirée étant fortement alcoolisée, le retour au vestiaire est assez... chaotique. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des convives ne reparte chez lui avec son propre chapeau ?
6. (Bonus) Établir que $\mathrm{D}_n = \lfloor \frac{n!}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2} \rfloor$ si $n \in \mathbb{N}^*$. *Indic. Utiliser le reste d'une série alternée.*


Une soirée mondaine


Eugène Catalan (1814-1894)

Exercice 25 *(Nombres de Catalan).* Soit n un entier naturel non nul. On appelle n^{e} nombre de Catalan le nombre de parenthésages possibles dans un produit de $n+1$ nombres et on le note C_n. Par exemple, si $n = 2$, $\mathrm{C}_2 = 2$ car $(ab)c$ et $a(bc)$ sont les deux seuls parenthésages possibles pour un produit de trois nombres. Par convention, on pose $\mathrm{C}_0 = 1$.

1. Déterminer C_1 et C_3.

2. Montrer que $\mathrm{C}_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k \mathrm{C}_{n-k}$.
3. On suppose pour l'instant que la série entière $\sum \mathrm{C}_n x^n$ a un rayon R non nul, et on note f sa somme. Montrer que $\forall x \in \left]-\mathrm{R}, \mathrm{R}\right[,\ x f(x)^2 = f(x) - 1$.
4. En déduire R et l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
5. Exprimer finalement C_n en fonction de n et en donner un équivalent.

Des variables aléatoires discrètes

14

- ✓ Savoir donner la définition d'une variable aléatoire, et maîtriser les notations $(\mathrm{X} = x)$, $(\mathrm{X} \leqslant x)$, etc.
- ✓ Avoir compris que la loi d'une VARD se décrit grâce à un germe de probabilité : $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n)$, où x_n sont les valeurs prises par X.
- ✓ Savoir donner la définition de l'indépendance d'une famille de variables aléatoires discrètes.
- ✓ Maîtriser les notions de loi conjointe et de loi marginale.
- ✓ Connaître les propriétés de l'espérance, de la variance et de la covariance.
- ✓ Maîtriser le théorème de transfert, indispensable et d'usage fréquent.
- ✓ Connaître le lien entre la fonction génératrice G_X, l'espérance $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et la variance $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.
- ✓ Connaître les lois $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$, leur interprétation probabiliste, leur espérance, leur variance, leur fonction génératrice. Plus important : savoir retrouver rapidement tout ça.
- ✓ Savoir expliquer l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
- ✓ Savoir démontrer l'inégalité de Markov, et savoir en déduire rapidement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres.

- ♠ Croire qu'une variable aléatoire est simplement une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans n'importe quoi d'autre d'ailleurs).
- ♠ Écrire des choses dénuées de sens comme $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ quand X est une variable aléatoire.
- ♠ Ne pas avoir compris l'importance de la convergence absolue dans la définition de l'espérance.
- ♠ Oublier l'hypothèse d'indépendance dans $\mathbb{E}(\mathrm{XY}) = \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ (avec l'hypothèse d'existence de $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ bien sûr).
- ♠ Oublier l'hypothèse d'indépendance dans $\mathbb{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}) + \mathbb{V}(\mathrm{Y})$ (avec l'hypothèse d'existence de $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{Y})$ bien sûr).
- ♠ Oublier l'hypothèse de positivité dans l'inégalité de Markov.

14.1 Exercices de base

Exercice 1 On lance deux dés, un blanc et un rouge. On note X le nombre indiqué par le dé blanc, et Y le maximum des numéros indiqués par les deux dés.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois de X et Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, \mathrm{N}]\!])$, où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.
Donner la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On pose $\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{X}+1}$.
Donner la loi de Y, puis calculer son espérance.

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé. On suppose que X suit $\mathcal{P}(\lambda)$ et que Y suit $\mathcal{P}(\mu)$. Pour tout entier n, déterminer la loi de X sachant $(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = n)$.

Exercice 5 Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la probabilité pour que X ne prenne que des valeurs paires.

Exercice 6 Soit λ dans $\mathbb{R}_+^*$ et soit X une variable de Poisson de paramètre λ. Déterminer $\mathbb{E}(\frac{1}{\mathrm{X}+1})$.

Exercice 7 Soit p dans $]0, 1[$ et soit X une variable géométrique de paramètre p. Déterminer $\mathbb{E}(\frac{1}{\mathrm{X}})$.

Exercice 8 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètres respectifs p et q. Calculer l'espérance de $\max(X, Y)$.

Exercice 9 Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(\frac{1}{n})$.

1. Montrer que $P(X \geqslant n^2) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $P(|X - n| \geqslant n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$. En déduire que $P(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 10 Soit $\lambda > 0$ et $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que $P\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda}$ et $P\left(X \geqslant 2\lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance, et soit $a > 0$. On pose $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma_X$.

1. Pour tout λ dans $\mathbb{R}_+$, montrer que $P(X-m \geqslant a) = P(X-m+\lambda \geqslant a+\lambda)$ puis que $\mathbb{E}((X-m+\lambda)^2) = \sigma^2 + \lambda^2$.
2. Montrer alors que $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $P(X-m \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2+\lambda^2}{a^2+\lambda^2+2a\lambda}$ et en déduire que $P(X-m \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$.
3. Démontrer que $P(|X - m| \geqslant a) \leqslant \frac{2\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$: quand cette inégalité est-elle meilleure que celle de Bienaymé-Tchebychev ?

14.2 Les grands classiques

Exercice 12 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètres respectifs p et q. Calculer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 *(Centrale 2024 (extrait)).* Soit p dans $]0, 1[$.

On considère le polynôme aléatoire $Q = \xi_1 + 2\xi_2 X$ où $\xi_1, \xi_2 \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$ sont indépendantes. On pose aussi $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité pour que $Q(A)$ soit inversible ?

Exercice 14 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ à valeurs dans un ensemble E et soit N une variable aléatoire sur ce même espace, mais à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction $Y : \Omega \to E$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Y est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Exercice 15 *(points fixes d'une permutation, Centrale 2023 (extrait)).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$: on munit cet ensemble de la tribu discrète $\mathscr{P}(\mathfrak{S}_n)$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Si $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la variable aléatoire $X_i : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ X_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X_i, et expliquer pourquoi les $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas indépendantes.
2. Déterminer le nombre moyen de points fixes des permutations de $\mathfrak{S}_n$.
3. Calculer la variance de $X_1 + \ldots + X_n$.

Exercice 16 *(identité de Wald).* Soit $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ suivent toutes une même loi, dont la fonction génératrice est G. On considère alors la somme aléatoire $S = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$.

1. Justifier que S est une variable aléatoire discrète et que $G_S = G_N \circ G$ sur $[0, 1]$.
2. On suppose que toutes les variables ont une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 17 Soit $X, X_0, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires discrètes réelles sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$. Démontrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels $X_n(\omega)$ tend vers $X(\omega)$ quand $n \to \infty$ est un événement.

Remarque. Quand cet événement est de probabilité 1, on dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* presque sûrement *vers* X.

Exercice 18 Grâce aux fonctions génératrices, montrer qu'il est impossible de truquer deux dés (à six faces) pour que la somme d'un lancer de ces deux dés suivent une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. *Indication : quelles sont les racines réelles du polynôme* $1 + X + \ldots + X^{10}$ *?*

Exercice 19 *(moindres carrés).* Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. On suppose que $\mathbb{V}(X) > 0$. Déterminer (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que la quantité $\mathbb{E}([Y - (aX + b)]^2)$ soit minimale. Interpréter graphiquement.

Exercice 20 *(taux de panne).* Soit T une variable aléatoire définie sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $P(T > n) \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Dans la pratique, T représente l'instant (en jours) où une machine va tomber en panne. On appelle *taux de panne de* T la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\tau_n = P_{(T\geqslant n)}(T = n)$.

1. Montrer que $\tau_n \in [0, 1[$ pour tout entier n.
2. Exprimer grâce à la suite τ la probabilité $P(T \geqslant n)$ pour tout n, et en déduire que $\sum \tau_n$ diverge.

Exercice 21 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des VARD sur un même espace probabilisé admettant toutes une variance. On appelle *matrice de covariance* la matrice $C = \Big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que $C \in \mathscr{S}_n^+\mathbb{R}$.

Exercice 22 *(le problème du collectionneur).* Chez les surgelés Picard, on peut acheter des galettes des rois et chacune contient une fève. Sur l'emballage on peut voir qu'il y a six fèves à collectionner en tout. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de galettes achetées ayant permis l'obtention de k fèves différentes.

1. Que vaut X_1 ? Déterminer la loi de $X_{k+1} - X_k$.
2. En déduire le nombre de galettes moyen permettant d'obtenir la collection complète des fèves.
3. En supposant les $X_{k+1} - X_k$ indépendantes, calculer σ_{X_6}. Qu'en conclure ?
4. Généraliser avec N fèves et donner un équivalent de $\mathbb{E}(X_N)$ quand $N \to \infty$.

Une nouvelle fève ?

Blaise Pascal (1623-1662)

Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Henri Poincaré (1854-1912)

Exercice 23 *(loi de Pascal et loi binomiale négative).* On considère un schéma de Bernoulli de paramètre p : c'est une expérience aléatoire aboutissant à un succès avec une probabilité p, ou à un échec avec la probabilité complémentaire $1 - p$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser pour obtenir n succès.

1. Montrer que la loi de la variable aléatoire discrète X ainsi créée, à valeurs dans $[\![n, +\infty[\![$ est définie, pour tout entier $k \geqslant n$,

$$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

La loi de X est alors appelée *loi de Pascal* de paramètres n et p, et se note $\mathscr{P}asc(n, p)$.

2. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{n}{p}$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \frac{n(1-p)}{p^2}$. *On pourra voir* X *comme la somme de* n *VARD indépendantes.*
3. Si $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathscr{P}asc(n, p)$, donner une interprétation de la variable $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - n$. Prouver que $\mathrm{Im}(\mathrm{Y}) = \mathbb{N}$ et que
$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y} = \ell) = \binom{-n}{\ell} p^n (p-1)^\ell,$$
où $\binom{\alpha}{n}$ a été défini pour tout (n, α) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{C}$ comme étant le nombre $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Cette égalité justifie le nom de la loi de Y : *loi binomiale négative* de paramètre (n, p) que l'on note $\mathscr{BN}(n, p)$.
4. Pour mener à bien un projet, une entreprise doit réunir 6 ingénieurs ayant des compétences pointues en informatique (notamment en Python !). Les recruteurs savent que la proportion de tels ingénieurs est assez faible : 15 % parmi les candidatures reçues seulement. Les entretiens étant techniques, on ne peut se permettre d'auditionner plus de 4 candidats par jour.
   (a) Combien de jours peuvent espérer mettre les RH pour réunir l'équipe voulue ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'ils la constituent en moins d'une semaine ? Discuter la pertinence de ce résultat en calculant un écart-type.

14.3 Exercices plus techniques

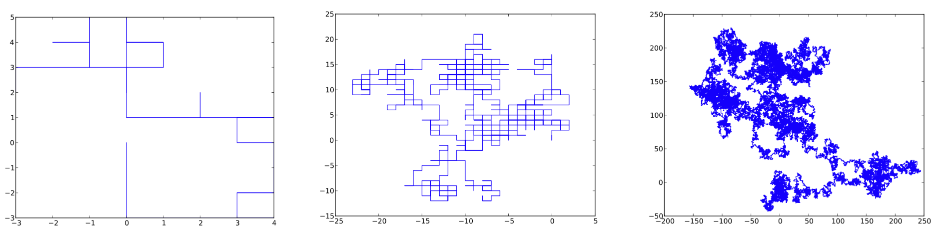
Exercice 24 *(formule du crible de Poincaré).* Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

1. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, rappeler pourquoi $\mathbb{E}(\mathbb{1}_\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$.
2. Justifier que pour tout (A, B) dans $\mathscr{A}^2$, $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \mathbb{1}_\mathrm{A} \times \mathbb{1}_\mathrm{B}$.
3. Soit P le polynôme $\prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - r_k)$ avec $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$. Si $k \in [\![1, n]\!]$, on note σ_k la somme de tous les produits k à k des racines de P, c'est-à-dire $\sigma_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} r_{i_1} \dots r_{i_k}$. Expliciter, en fonction de σ_k, les coefficients du polynôme P.
4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ des événements. Démontrer la célèbre formule :
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_{i_1} \cap \dots \cap \mathrm{A}_{i_k}).$$

Exercice 25 *(marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$).* Un point se déplace sur $\mathbb{Z}$. Au départ, il est en 0. À chaque étape, il se déplace d'un cran vers la droite ou d'un cran vers la gauche avec une probabilité identique. Les déplacements se font de manière indépendante.

1. Pour tout entier n, on note A_n la position du point à l'étape n. Ainsi, $\mathrm{A}_0 = 0$. On note aussi D_n le nombre de déplacements d'un cran vers la droite après n étapes.
   (a) Donner une relation liant A_n et D_n.
   (b) Déterminer la loi de D_n.
2. Trouver la loi de A_n et en déduire que la série $\sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_n = 0)$ diverge.

On définit de la même façon une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$. En illustration, une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ réalisée avec Python.



Des intégrales à paramètre 15

- ✓ Savoir expliquer pourquoi la convergence uniforme est suffisante mais pas nécessaire pour intervertir limite et intégrale sur un segment.
- ✓ *A contrario*, savoir donner des contre-exemples de suites de fonctions cpm (f_n) convergeant uniformément sur un intervalle (nécessairement non borné) sans pour autant qu'il y ait interversion limite-intégrale.
- ✓ Connaître parfaitement les hypothèses précises des théorèmes de ce chapitre : aucune démonstration n'est au programme, il faut donc être encore plus irréprochable que d'habitude !
- ✓ Savoir trouver une fonction dominante. Autrement dit, savoir majorer une quantité $|f(x,t)|$ indépendamment de x. Au besoin, on peut considérer que x ne varie que sur un segment $[a,b]$.

- ♠ Trouver une fonction dominante qui dépend de n (dans le cas de la convergence dominée) ou de x (dans le cas des intégrales à paramètre).
- ♠ Se mélanger entre la variable d'intégration, notée t dans ce cours, et le paramètre, noté x ici. Bien sûr, on peut inverser toutes les notations. Notons qu'en SI, le paramètre dans la transformée de Laplace se note p (et c'est d'ailleurs un nombre complexe).
- ♠ Tenter de faire une domination sur tout segment en considérant des segments inclus dans... l'intervalle sur lequel on intègre ! C'est dans l'intervalle dans lequel évolue le paramètre qu'il faut segmenter !

15.1 Exercices de base

Exercice 1 *(intégrales de Wallis).* Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ grâce au théorème de convergence dominée. Pouvait-on utiliser la convergence uniforme pour intervertir limite et intégrale ?

Exercice 2 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x$.

On rappelle que l'on pose, pour tout $x>1$, $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ (fonction zêta d'Euler-Riemann).

Exercice 3 Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^p}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=p!\zeta(p+1)$.

Exercice 4 Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{3\zeta(2)}{4}$.

Exercice 5 *(Cesàro intégral).* Si f est continue par morceaux sur un segment $[a,b]$, on appelle *valeur moyenne de f sur* $[a,b]$ la quantité $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue par morceaux admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que la valeur moyenne de f sur $[0,n]$ tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

15.2 Les grands classiques

Exercice 6 *(l'astuce de la fonction indicatrice).* Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\mathrm{d}x$. Pour cela, on remarquera que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^n\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\mathbb{1}_{[0,n]}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7 *(intégrale à paramètre).* Soit I et J deux intervalles de longueurs non nulles et $f:\mathrm{I}\times\mathrm{J}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que

- pour tout t dans I, $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J,
- pour tout x dans J, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur I.

On suppose de plus que $a \in \mathrm{I}$ et que $b : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ est dérivable. Expliquer pourquoi la fonction

$$x \longmapsto \int_a^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur J et déterminer sa dérivée.

Exercice 8 *(lemme de factorisation de Hadamard).* Il est bien connu que si un polynôme P a pour racine 0, alors il existe un polynôme Q tel que $\mathrm{P} = \mathrm{XQ}$. Cette propriété est toute aussi vraie pour les fonctions DSE_0. Cet exercice montre qu'elle est encore vraie pour les fonctions de $\mathscr{C}^\infty$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que s'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(x) = xg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors g est unique.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^1 f'(ux)\,\mathrm{d}u$. En déduire que g est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$.
3. Montrer que cette propriété de factorisation est fausse pour les fonctions seulement continues.

Exercice 9 *(intégrale de Gauss,* le tube *inter-concours).*

1. Prouver l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, que l'on notera I.
2. On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+$ en posant, pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Après avoir dérivé f et g (en justifiant), établir une relation entre f et g.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 10 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Pour chaque réel p de $\mathbb{R}_+$, on pose $\mathrm{F}(p) = \int_0^1 f(t)^p\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\mathrm{F}'(0)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{p\to 0}\left(\int_0^1 f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$.

Remarque. On peut montrer que $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\left(\int_0^1 f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} = \sup_{[0,1]}|f|$*, d'où l'explication de la notation* $\|f\|_\infty$.

Exercice 11 *(transformée de Fourier, Centrale-Supélec écrits 2021).* Pour toute fonction continue par morceaux intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (c'est-à-dire $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$) on définit une fonction $\hat{f}$ par

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi t\nu}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est correctement définie sur $\mathbb{R}$ et que $\hat{f}$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ (on note $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace des fonctions bornées).
2. Prouver que $\hat{f}$ est une fonction continue.
3. Justifier que $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace normé $(\mathbb{L}_c^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace normé $(\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.
4. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Expliquer alors pourquoi $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et calculer $(\hat{f})^{(k)}$. A-t-on $(\hat{f})' = \widehat{f'}$?
5. Déterminer $\hat{f}$ si f la fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$.

Exercice 12 *(intégrale de Dirichlet).* On sait que $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge (mais pas absolument). On se propose de (re)trouver sa valeur. On considère la transformée de Laplace du sinus cardinal, définie par

$$\forall p \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{F}(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
2. Justifier que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer simplement $\mathrm{F}'(p)$ pour $p > 0$.
3. En déduire l'expression de $\mathrm{F}(p)$ quand $p > 0$.
4. On admet que F est continue en 0. En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet.
5. $(*)$ Montrer que F est continue en 0.
   Indication. Découper $\mathbb{R}_+$ *en segments de la forme* $[n\pi, (n+1)\pi]$ *et utiliser une série alternée.*

Exercice 13 *(Centrale 2023, extrait).* On cherche à donner un sens à $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ pour certaines séries divergentes $\sum a_n$, en généralisant le procédé de sommation habituel.

Une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{B} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est appelée *famille de Bertrand* quand il existe M dans $\mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n \leqslant \mathrm{M}$ et quand $\int_0^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t = 1$ pour tout entier n. De plus, une série réelle $\sum a_n$ est dite $\mathscr{B}$*-convergente* quand

— la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue S_a.
— l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{S}_a(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

Dans ce cas, le nombre $\int_0^{+\infty} \mathrm{S}_a(t) \, \mathrm{d}t$ s'appelle la $\mathscr{B}$-somme de $\sum a_n$ et se note $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}}^{\mathscr{B}} a_n$.

1. Si $\sum a_n$ est absolument convergente, montrer qu'elle est $\mathscr{B}$-convergente pour toute famille de Bertrand $\mathscr{B}$, et calculer $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}}^{\mathscr{B}} a_n$.
2. On pose $f_n(t) = \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$ pour tout (n, t) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de Bertrand, que l'on notera $\mathscr{B}$. Montrer que $\sum (-1)^n$ est $\mathscr{B}$-convergente et calculer $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}}^{\mathscr{B}} (-1)^n$.

15.3 Exercices plus techniques

Exercice 14 *(produit de convolution, Centrale-Supélec).* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que g est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$.

1. Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t) \, \mathrm{d}t$ converge. On note $(f \star g)(x)$ sa valeur.
2. Établir que $f \star g = g \star f$.
3. Justifier que $f \star g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer sa dérivée.

Exercice 15 *(un théorème de Fubini).* Soit $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.$$

Remarque. Cette quantité est évidemment $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *où* D *est le rectangle* $[a, b] \times [c, d]$.

Exercice 16 *(encore Euler ! Centrale-Supélec).* Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x) \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

Indication : on pourra se servir de $f_n : x \mapsto \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

Des espaces préhilbertiens réels 16

16.1 Faire le point sur le cours

- ✓ Savoir montrer qu'une application est un produit scalaire.
- ✓ Connaître les produits scalaires de référence.
- ✓ Savoir énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- ✓ Connaître les formules de polarisation, et savoir à quoi elles servent.
- ✓ Savoir mettre en place l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonormaliser une famille libre.
- ✓ Connaître les relations de base concernant l'orthogonal d'une partie (renversement des inclusions, etc.)
- ✓ Connaître la théorie du supplémentaire orthogonal et du double orthogonal, en tout cas en dimension finie.
- ✓ Savoir donner l'expression d'une projection orthogonale dans une base orthonormale.
- ✓ Avoir compris comment les projections orthogonales intervenaient pour le calcul la distance d'un point à un sous-espace de dimension finie. Bien connaître le cas particulier des hyperplans.
- ✓ Savoir expliquer le lien entre formes linéaires et vecteurs d'un espace euclidien grâce au théorème de Riesz.

- ♠ Écrire SchwarTz au lieu de Schwarz, et le prononcer « chouarze »
- ♠ Croire que la propriété d'être *positif* pour un produit scalaire est le fait que $\langle u \mid v\rangle \geqslant 0$ pour tous vecteurs u et v : c'est $\langle u \mid u\rangle \geqslant 0$!
- ♠ Croire que $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$: l'aspect non dégénéré n'est pas vérifié car la continuité est manquante.
- ♠ Croire que pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien E, on a toujours $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$.
- ♠ Dire en khôlle que toute forme linéaire d'un espace euclidien est représentable et... ne pas savoir expliquer ce que cela veut dire.
- ♠ Croire que tout hyperplan admet un vecteur normal : c'est le cas dans les espaces euclidien cependant.

16.2 Exercices de base

Exercice 1 *(théorème du losange).* Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Pour tous vecteurs x et y de E, démontrer que $\|x\| = \|y\|$ si et seulement si $x + y \perp x - y$.
2. Expliquer en quoi cela donne une caractérisation des losanges parmi les parallélogrammes.

Exercice 2 Soit n dans $\mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de l'entier p l'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{p} \mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 3 Montrer que l'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}\mathrm{P}(n)\mathrm{Q}(n)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Exercice 4 L'espace $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est muni des deux produits scalaires suivants

$$\varphi : (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \longmapsto \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi : (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} p_k q_k$$

(où p_k et q_k sont les coefficients de degré k des polynômes P et Q).

1. Pour quel produit scalaire X^3 est-il plus proche de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$?
2. On pose $\varepsilon = 10^{-42}$. Construire un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de sorte que $\mathrm{dist}(\mathrm{X}^3, \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]) = \varepsilon$.

Exercice 5 Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, et soit F et G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$ et que $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp} \supset \mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp}$.
2. Si E est de dimension finie, montrer que $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp}$.

Exercice 6 *(polynômes de Legendre)*. On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du produit scalaire $\varphi : (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \int_{-1}^{1} \mathrm{PQ}$. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt sur $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ pour obtenir une famille $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ orthogonale telle que $\mathrm{P}_k(1) = 1$ pour tout k.

Exercice 7 Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ pour tous x et y dans E. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.

Exercice 8 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, \mathrm{d}x$ pour tout entier n. Montrer que pour tous n et p dans $\mathbb{N}$, $(\mathrm{I}_{n+p})^2 \leqslant \mathrm{I}_{2n}\mathrm{I}_{2p}$.

Exercice 9 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique.
1. Calculer la distance du point $\mathrm{M} = (1,2,3)$ au plan $\mathrm{P} : x + 3y - z = 0$.
2. Calculer la distance du point $\mathrm{M} = (1,2,3)$ à la droite $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,1,1))$.
3. Mêmes questions mais avec le plan affine $\mathscr{P} : x+3y-z = 1$ et la droite affine $\mathscr{D} = (2,-1,3)+\mathrm{D}$.

Exercice 10 *(École Navale)*. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ représente une projection orthogonale sur un certain sous-espace que l'on déterminera.

Exercice 11 *(autour de Riesz 1 : intégration numérique de Newton-Cotes)*.
1. Justifier l'existence de réels p_1, p_2, p_3 tels que $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = p_1\mathrm{P}(0) + p_2\mathrm{P}(\frac{1}{2}) + p_3\mathrm{P}(1)$.
2. Déterminer de tels réels et en déduire une approximation décimale de $\ln(2)$.

Exercice 12 *(autour de Riesz 2, Centrale 2023)*. Soit n un entier naturel non nul.
1. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}$ qui à tout polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$ associe $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$ est une forme linéaire.
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \int_0^1 x^k \mathrm{P}(x)\, \mathrm{d}x = 1$.
3. On note $p_0, \ldots, p_{n-1}$ les coefficients de ce polynôme P. Soit f dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant les relations $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \int_0^1 x^k f(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Démontrer que $\int_0^1 f(x)^2\, \mathrm{d}x \geqslant p_0 + \ldots + p_{n-1}$.

Exercice 13 *(autour de Riesz 3)*.
1. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme A dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(0) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{A}(t)\, \mathrm{d}t$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Montrer alors que $\deg(\mathrm{A}) = n$. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer* XA.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme A tel que $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(0) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{A}(t)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 14 *(autour de Riesz 4)*. Si P et Q sont dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\, \mathrm{d}t$.
1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(0)$ est une forme linéaire continue sur E.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé mais que pourtant $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus (\mathrm{Ker}(\varphi))^{\perp} \neq \mathrm{E}$.
4. En déduire que la forme linéaire $\varphi : \mathrm{P} \to \mathrm{P}(0)$ n'est pas représentable (bien que continue).

5. Dans un espace préhilbertien, si deux sous-espaces sont supplémentaires, leurs orthogonaux le sont-ils aussi ?

Exercice 15 *(Espace préhilbertien de dimension finie).* Montrer que tout espace préhilbertien réel de dimension finie est un espace de Hilbert, c'est-à-dire que toute série absolument convergente est convergente. *Indication : on pourra se servir de la « norme infinie » associée à une base.*

Exercice 16 *(un espace préhilbertien qui n'est pas de Hilbert).* Si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n q_n$ (où p_n est le n^{e} coefficient de P, idem pour Q).

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle$ est correctement défini et que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{2^n} X^n$ est absolument convergente, mais ne converge pas.
3. En déduire que $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot\rangle)$ n'est pas un espace de Hilbert.

16.3 Les grands classiques

Exercice 17 *(description des produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ sera identifié à la colonne correspondante. Montrer que les produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ sont exactement les applications de la forme

$$\varphi_A : (X, Y) \longmapsto X^{\intercal} A Y$$

où $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer de plus que A est unique : ainsi, l'application $A \mapsto \varphi_A$ est une bijection de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des produits scalaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 18 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, soit $\mathscr{D}$ la droite affine passant par $A = (1, 1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (2, 0, -3)$ et soit $\mathscr{D}'$ la droite affine passant par $A' = (-1, 0, 2)$ et dirigée par $\vec{u}' = (1, 1, 2)$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une droite $\mathscr{D}''$ à la fois perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$.

Exercice 19 *(Centrale-Supélec 2022).* Soit n un entier naturel non nul et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^{\intercal} \cdot A)$. *Indication : utiliser la norme euclidienne.*
2. En déduire que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A \cdot A^{\intercal})$.

Exercice 20 Soit n un entier naturel non nul. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Que vaut alors $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})^{\perp}$?
2. Calculer la distance de I_n à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Prouver que pour tout A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}(A^{\intercal} \cdot A)}$.

Exercice 21 *(caractérisation des projections orthogonales).* Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et p une projection de E. Montrer que

1. p est une projection orthogonale ssi $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ (inégalité de Bessel).
2. p est une projection orthogonale non nulle ssi $|||p||| = 1$.
3. p est une projection orthogonale ssi $\forall x \in E,\ \langle p(x), x\rangle \geqslant 0$.

Exercice 22 *(décomposition QR).* Soit n un entier naturel non nul et A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer, grâce au procédé de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de A, qu'il existe un couple (Q, R) avec Q dans $O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs tel que $A = QR$.
2. Expliquer en quoi cette décomposition facilite la résolution du système linéaire $AX = B$.

3. *Application 1.* Trouver la décomposition QR de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. *Application 2.* Prouver que pour toute matrice A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $|\det(\mathrm{A})| \leqslant \|\mathrm{C}_1\| \times \ldots \times \|\mathrm{C}_n\|$ où $\|\mathrm{C}_i\|$ est la norme euclidienne de la i^{e} colonne de A (inégalité de Hadamard).

Exercice 23 Soit n un entier naturel. Grâce à la théorie des projections orthogonales, déterminer la valeur de

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,(x^n - a - bx)^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 24 *(matrice de Gram, Centrale-Supélec 2022).* Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n (un entier non nul). Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille de p vecteurs de E, on note $\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le terme de place (i, j) est $\langle x_i, x_j\rangle$: c'est la *matrice de Gram* de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$. Son déterminant sera noté $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)$.

1. Que vaut $\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_p)$ si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormale ?
2. Montrer que si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille liée alors $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = 0$.
3. On suppose que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, et on pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. Si $\mathscr{B}$ désigne une base orthonormale de F, on note M la matrice dont la i^{e} colonne est formée des coordonnées de x_i dans $\mathscr{B}$.
   (a) Exprimer $\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_p)$ en fonction de M et $\mathrm{M}^\intercal$. En déduire que $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) > 0$.
   (b) Montrer que si $x \in \mathrm{E}$, alors $d(x, \mathrm{F}) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{G}(x, x_1, \ldots, x_p)}{\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)}}$. *On utilisera* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$
   (c) Si $a \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, retrouver la formule « $d(x, a^\perp) = \dfrac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}$ ».

Exercice 25 *(moindres carrés et équation normale, CentraleSupélec).* Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (donc *a priori* non inversible puisque même pas carrée). On cherche à résoudre le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, la matrice colonne B étant donnée dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et l'inconnue étant dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. En général, il n'y a pas de solution à ce système, aussi pense-t-on à trouver les $\mathrm{X}^* \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\|\mathrm{AX}^* - \mathrm{B}\| = \min_{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (on parle alors *d'optimisation par les moindres carrés*).

1. Montrer que X^* réalise ce minimum si et seulement si $\mathrm{A}^\intercal\mathrm{AX}^* = \mathrm{A}^\intercal\mathrm{B}$ (équation normale).
2. Si $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = p$, montrer que l'équation normale admet une unique solution.
   Indication : $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}^\intercal\mathrm{A})$ *d'après l'exercice 19.*

16.4 Exercices plus techniques

Exercice 26 *(adjoint d'un endomorphisme).* Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. On suppose qu'il existe g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que
   $$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$
   Montrer que g est alors unique. *Quand il existe, g se note f^* et s'appelle l'adjoint de f.*
2. Montrer que si E est de dimension finie, alors tout endomorphisme f admet un adjoint.
3. On suppose toujours E de dimension finie n, et on considère $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Si M désigne $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(f)$, déterminer $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(f^*)$.
4. *Exemple 1.* On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique (rappeler sa définition à l'aide de la trace). Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère l'application $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MB}$ qui est évidement linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Déterminer son adjoint.

5. *Exemple 2.* On munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$. Pour tout f dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ on note $\Phi(f)$ la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ qui admet un adjoint.
6. *Exemple 3.* On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du produit scalaire $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(0)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ n'ayant pas d'adjoint (se servir de l'exercice 13).

Des endomorphismes remarquables des espaces euclidiens 17

- ✓ Avoir compris le lien entre isométrie linéaire et matrice orthogonale.
- ✓ Savoir démontrer que $f(\mathrm{V}^\perp) = f(\mathrm{V})^\perp$ si f est une isométrie.
- ✓ Avoir compris que la relation $\mathrm{M}^\intercal\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ signifie ni plus ni moins que les colonnes de M forment une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- ✓ Connaître la description de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
- ✓ Savoir définir les notions de produits mixte et vectoriel. Connaître l'interprétation géométrique de ces produits.
- ✓ Savoir définir une rotation dans l'espace, et savoir décrire ses éléments caractéristiques.
- ✓ Avoir compris le lien entre endomorphisme symétrique et matrice symétrique.
- ✓ Savoir décrire les isométries symétriques.
- ✓ Savoir décrire les projections symétriques.
- ✓ Connaître parfaitement le théorème spectral.

- ♠ Croire qu'en dimension infinie, une isométrie est toujours bijective (elle est seulement injective en général).
- ♠ Croire qu'une matrice de déterminant 1 ou -1 est une matrice orthogonale.
- ♠ Parler d'angle d'une rotation dans l'espace, sans avoir orienté la droite de ses invariants.
- ♠ Croire qu'une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$: elle n'est qu'orthosemblable à cette matrice.
- ♠ Oublier la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
- ♠ N'énoncer que la moitié du théorème spectral en disant que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable : c'est beaucoup plus fort que ça !
- ♠ Croire que le théorème spectral est valable pour les matrices symétriques complexes.

17.1 Exercices de base

Exercice 1 Soit E un espace euclidien et f dans O(E) diagonalisable. Montrer que f est une symétrie.

Exercice 2 *(Une isométrie non surjective)* On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_k q_k$ (où p_k et q_k sont les coefficients de degré k de P et Q). Montrer que l'application $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}$ est une isométrie vectorielle, mais qu'elle n'est pas surjective.

Exercice 3 Soit ϑ un réel. Pourquoi est-il très facile d'inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$?

Exercice 4 *(École navale).* On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique. On note s la réflexion (vectorielle) par rapport à la droite D d'équation $2x + 3y = 0$.

Déterminer l'expression analytique de s, c'est-à-dire $s(x, y)$ en fonction de x, y.

Exercice 5 *(École navale).* On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique. Déterminer analytiquement la réflexion vectorielle s par rapport au plan P d'équation $2x + y - z = 0$.

Exercice 6 *(Centrale-Supélec, extrait).* Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 7 On pose $\mathrm{A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice d'une rotation et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 8 On pose $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & * \\ -2 & 6 & * \\ 3 & * & * \end{pmatrix}$. Compléter A pour que ce soit la matrice d'une rotation. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 9 *(rotations et produit vectoriel).* Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Si R est une rotation vectorielle de E, montrer que R conserve le produit vectoriel, c'est-à-dire $\forall (x, y) \in E^2,\ R(x \wedge y) = R(x) \wedge R(y)$.
2. Réciproquement, si f un endomorphisme non nul de E qui préserve le produit vectoriel, montrer que f est une rotation.

Exercice 10 *(antirotation).* On pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in O_3^-(\mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 11 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. On définit l'application $f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & A \cdot M^\intercal \cdot A. \end{array}$ Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une matrice A pour laquelle f_A est positif et une matrice A′ pour laquelle $f_{A'}$ n'est pas positif.

Exercice 12 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, espace qui est muni de sa structure euclidienne canonique. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $M \mapsto AM$ soit une isométrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13 *(École polytechnique).* Soit P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 0, -1, 1)$ et $v = (0, 2, -3, 1)$.

1. Décrire P par un système de deux équations linéaires.
2. Déterminer la projection orthogonale du point $M = (1, 1, 1, 1)$ sur P.

Remarque. Malgré la simplicité de cet exercice, le jury rapporte qu'il a mis en difficulté la plupart des candidats.

17.2 Les grands classiques

Exercice 14 Soit n un entier naturel non nul et A dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si F est un sous-espace stable par A, alors $F^\perp$ aussi.
2. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$ où A′ est antisymétrique inversible. En déduire que rg(A) est pair.

Exercice 15 Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 16 Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que l'ensemble des projections orthogonales est une partie fermée-bornée de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que l'ensemble des symétries orthogonales est une partie fermée-bornée de $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que ces deux ensembles sont en bijection.

Exercice 17 *(la plus grande valeur propres).* Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. On note $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. Démontrer que

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} \langle f(x), x \rangle.$$

Exercice 18 *(Mines-Ponts, Centrale-Supélec).* Soit E un espace euclidien et f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ préservant l'orthogonalité :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad x \perp y \Longrightarrow f(x) \perp f(y).$$

1. (lemme du losange) Si u et v sont unitaires, montrer que $u+v \perp u-v$.
2. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{E}$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.
3. En déduire qu'il existe g dans $\mathrm{O}(\mathrm{E})$ tel que $f = kg$.

Exercice 19 *(matrice d'une forme bilinéaire).* Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si $\varphi : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire sur E, on pose

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \Big(\varphi(e_i, e_j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

et on dit que c'est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que si X et Y sont les colonnes des coordonnées de deux vecteurs x et y dans la base $\mathscr{B}$, alors $\varphi(x,y) = \mathrm{X}^\intercal \mathrm{A} \mathrm{Y}$ où $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
2. Si A et A′ représentent φ dans deux bases différentes, montrer qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^\intercal$ (on dit que A et A′ sont *congruentes*).
3. Montrer que φ est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est symétrique.
4. Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 20 *(quasi réduction simultanée).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$, A dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et B dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que $\varphi : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{X}^\intercal \mathrm{A} \mathrm{Y}$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^\intercal \mathrm{P}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{P}^\intercal \mathrm{D} \mathrm{P}$

17.3 Les exercices plus techniques

Exercice 21 *(Mines-Ponts).* Soit a un réel. Dans l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (muni d'une norme quelconque), déterminer

$$\lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n .$$

Indication : remarquer que la matrice sous la limite est « presque » une matrice de rotation.

Exercice 22 *(Isométries d'un espace euclidien).* Soit E un espace euclidien et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application telle que $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$ et $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tous x et y dans E.

1. Montrer que f est linéaire et que $f \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$.
   Indication. On pourra montrer que $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = 0$ *et* $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2 = 0$ *quel que soit* (λ, x, y).
2. Que peut-on dire si on enlève l'hypothèse $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$?

Exercice 23 *(Centrale-Supélec).* Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices dont le spectre (réel) est ou bien vide, ou bien réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{V} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.
   Indication : quelles sont les matrices symétriques appartenant à V *?*
2. Prouver que cette inégalité est optimale.

Euclide d'Alexandrie
$\sim$ 300 av. J.-C.

David Hilbert
(1862-1943)

Des variables aléatoires à densité (∗) 18

18.1 Exercices de base

Exercice 1 Soit λ un réel strictement positif. Si $A \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$, on considère le polynôme aléatoire

$$X^2 + 2(A-2)X + 2A - 4.$$

Quelle est la probabilité que P ait ses racines réelles ?

Exercice 2 Soit $\lambda > 0$ et $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

1. Montrer que X est sans mémoire, c'est-à-dire $\forall s, t > 0$, $P_{(X>s)}(X > s+t) = P(X > t)$.
2. Réciproquement, si Y est une VAR continue sans mémoire, presque sûrement positive et telle que $F_Y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que Y suit une loi exponentielle, dont on précisera le paramètre $\lambda > 0$.

On pourra utiliser le résultat classique de Sup : les seules fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous x et y sont de la forme $x \mapsto e^{ax}$ pour un certain réel a.

Exercice 3 Soit $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(0,1)$. Montrer que le couple aléatoire (X, X) n'admet pas de densité.

Exercice 4 Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence (en millier de litres) est une variable aléatoire X de densité $f : x \mapsto c(1-x)^3 \mathbb{1}_{[0,1]}$, où $c > 0$ est une constante.

1. Déterminer la constante c.
2. La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20 heures. Quelle doit être la capacité de la citerne pour que la probabilité d'avoir une pénurie soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 5 *(loi de Laplace)* On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Laplace quand elle admet $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour densité.

1. Vérifier qu'il s'agit effectivement d'une densité de probabilité.
2. Si X suit une loi de Laplace, montrer qu'elle admet des moments à tous les ordres, et les calculer.

18.2 Détermination de lois

Exercice 6 Montrer que l'inverse d'une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy $\mathscr{C}(0,1)$ suit encore la loi $\mathscr{C}(0,1)$.

Exercice 7 *(stabilité des lois normales)*

1. Soit $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(0,1)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. *On pourra résoudre une EDL1.*
2. Soit $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \rightsquigarrow \mathscr{N}(m, s^2)$ que l'on suppose indépendantes. Montrer que $X + Y \rightsquigarrow \mathscr{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$.

Exercice 8 *(stabilité des lois gamma)* Les VAR considérées sont toutes définies sur un même univers. Soit ν et ν' dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Si $X \rightsquigarrow \gamma(\nu)$, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = (1+t^2)^{-\frac{\nu}{2}} e^{i\nu \operatorname{Arctan}(t)}$. Si $\nu \in \mathbb{N}^*$, montrer de plus que $\varphi_X(t) = \left(\frac{1+it}{1+t^2}\right)^\nu$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que si $X \rightsquigarrow \gamma(\nu)$ et $Y \rightsquigarrow \gamma(\nu')$ sont indépendantes, alors $X + Y \rightsquigarrow \gamma(\nu + \nu')$.
3. Quelle est la loi de $X_1 + \ldots + X_n$ si les X_i sont indépendantes suivant toutes $\mathscr{E}(1)$?

Exercice 9 On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit *la loi de l'Arc-sinus* $\mathscr{A}$ quand elle admet $f : x \mapsto \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)$ comme densité.

1. Vérifier que cette fonction est bien une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F correspondante.
2. Si $\Theta \rightsquigarrow \mathscr{U}(]-\pi,\pi])$, montrer que $\cos\Theta$ et $\sin\Theta$ suivent la loi $\mathscr{A}$.

Exercice 10 Si X et Y sont indépendantes de densités respectives f_X et f_Y, on sait que $X+Y$ a pour densité $f_X * f_Y$.

1. Expliquer pourquoi $f_X + f_Y$ ne peut jamais être la densité de $X+Y$.
2. Après avoir justifié que $\frac{1}{2}(f_X + f_Y)$ était elle aussi une densité, déterminer une variable aléatoire Z ayant cette densité.
3. Plus généralement, si $\lambda \in]0,1[$, déterminer une VAR Z ayant $\lambda f_X + (1-\lambda)f_Y$ comme densité.

Exercice 11 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On appelle loi du khi-deux à n degrés de liberté la loi de $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ quand $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$.

1. Déterminer une densité de X_1^2 et démontrer que c'est la densité de $2Y_1$ si $Y_1 \rightsquigarrow \gamma(\nu)$ avec ν bien choisi.
2. En déduire une densité de $\chi^2(n)$ (on pourra se servir de la stabilité des loi gamma). Que retrouve-t-on si $n=2$?

Exercice 12 Soit X et Y deux VAR indépendantes suivant la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$. Montrer que $\frac{X}{Y}$ (qui est définie presque sûrement partout) suit la loi de Cauchy $\mathscr{C}(0,1)$.

18.3 Détermination d'espérance et de variance

Exercice 13 Soit $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(0,1)$.

1. Déterminer la loi et l'espérance de $Y = X|X|$.
2. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 14 Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f. On suppose que X admet une espérance. Si F_X désigne sa fonction de répartition, démontrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. Cette formule est l'exacte généralisation de $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n)$*, qui a été démontrée pour les variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

Exercice 15 On lance une fléchette sur une cible circulaire représentée par le disque unité $D(0,1)$. On modélise la situation en disant que la probabilité que la fléchette se plante dans une partie A de $D(0,1)$ (supposée être borélienne...) est proportionnelle à l'aire de A.

1. Si X est la variable aléatoire mesurant la distance de la fléchette au centre de la cible, montrer que X admet une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et σ_X. Et la médiane de X ?

Exercice 16 Une grenouille avance (sans jamais reculer) en faisant des bonds indépendants, aléatoirement uniformes entre 0 et 1 mètre.

1. Quelle est la distance moyenne après deux sauts ?
2. De façon surprenante, établir que le nombre moyen de sauts nécessaires pour dépasser 1 mètre n'est pas 2.

Exercice 17 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon finie d'une même VAR X que l'on suppose admettre une densité f : les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont donc indépendantes, de même loi dont f est une densité. On pose alors

$$S_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad I_n = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Déterminer les fonctions de répartition des variables aléatoires S_n et I_n et montrer qu'elles ont des densités que l'on explicitera.
2. Tracer ses densités pour $n = 3$ et $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(0, 1)$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}(I_n)$ quand $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(S_n)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 18 A et B se fixent un rendez-vous dans un bar branché du 6e arrondissement de Paris, entre 0 h et 1 h du matin. On suppose que chacun arrive à un instant aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(0, 1)$.

1. Calculer le temps moyen d'attente de la première personne arrivée sur les lieux.
2. On note X_1 et X_2 les heures d'arrivée de la 1re personne et de la 2e personne. Déterminer les lois de X_1 et X_2 ainsi que leur coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.
3. A veut bien attendre au maximum 30 min avant de repartir s'il ne voit pas arriver son compère. B est moins patient : il n'attend que 15 min tout au plus. Quelle est la probabilité que nos deux lascars se voient ?

18.4 Modes de convergence

Exercice 19 Pour tout entier non nul n, on suppose que $X_n \rightsquigarrow \mathcal{U}(0, \frac{1}{n})$. A-t-on convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Et si $X_n \rightsquigarrow \mathcal{U}(0, n)$?

Exercice 20 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un échantillon de la loi $\mathcal{U}(0, 1)$. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on considère $Y_n = n(1 - M_n)$. Démontrer que $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$.

Exercice 21 On fait tomber une boîte de 9000 dés (à six faces).

1. Estimer la probabilité d'obtenir un nombre de « 6 » compris entre 1 450 et 1 550 grâce au théorème limite central.
2. Comparer avec ce que donnerait l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. À l'aide d'un ordinateur, calculer la véritable valeur de cette probabilité.

Exercice 22 *(théorème de Khintchine).* On souhaite baisser les hypothèses de la loi faible des grands nombres. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VAR (à densité ou discrètes) indépendantes, admettant un moment d'ordre 1 (seulement !) mais suivant toutes la même loi qu'une VAR X donnée.

1. Donner l'expression de la fonction caractéristique φ_n de $M_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ en fonction de φ_X.
2. Donner le développement limité à l'ordre 1 de φ_X en 0.
3. En déduire la limite de $\varphi_n(t)$ quand n tend vers $+\infty$, et conclure par le théorème de Lévy.

Des distributions (∗) 19

19.1 Exercices de base

Exercice 1 Parmi les fonctions de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, dire lesquelles sont des distributions.

1. $\varphi \longmapsto \int_0^1 \varphi(t)\ \mathrm{d}t$.
2. $\varphi \longmapsto \int_0^1 |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t$.
3. $\varphi \longmapsto \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \varphi^{(n)}(0)$ (où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$).
4. $\varphi \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)$.
5. $\varphi \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$.
6. $\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{|t|^\alpha}\ \mathrm{d}t$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice 2 Pour tout entier n, on pose $f_n = x \mapsto \sin(nx)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer cependant que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens des distributions (i.e. dans $\mathscr{D}'$) vers 0.

Exercice 3 On note Π l'indicatrice de $[-1,1]$ (fonction porte). Pour tout entier n et tout réel x, on pose

$$f_n(x) = n\Pi(nx) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = n^2\Pi(nx).$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens des distributions (i.e. dans $\mathscr{D}'$) vers la distribution de Dirac δ_0.
2. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathscr{D}'$.

Exercice 4 Dériver au sens des distributions les fonctions suivantes.

1. La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$.
2. La fonction porte $\Pi = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.
3. La fonction signe sgn (qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$, -1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et 0 en 0).

Exercice 5 *(moment dipolaire).* On pose, pour tout entier non nul n, $\Pi_n = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$. Montrer que $(\Pi_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathscr{D}'$.

Exercice 6 Soit f dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et T dans $\mathscr{D}'$. Montrer que $(f\mathrm{T})' = f'\mathrm{T} + f\mathrm{T}'$.

Exercice 7 Soit T dans $\mathscr{D}'$. Montrer que la suite $\left(\frac{\tau_{-\frac{1}{n}}\mathrm{T}-\mathrm{T}}{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathscr{D}'$ vers T'.

19.2 Transformée de Fourier

Exercice 8 Montrer que $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ est continue.

Exercice 9 Si $a \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'$, déterminer $\mathscr{F}[\tau_a\mathrm{T}]$ et $\mathscr{F}[\mu_a\mathrm{T}]$.

Exercice 10 Soit ν_0 un réel. Déterminer $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\nu_0 x}]$ où $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\nu_0 x}$ désigne T_f, où $f = x \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\nu_0 x}$.

De la théorie de Fourier ($*$) 20

20.1 Développement en série de Fourier

Exercice 1 Soit $T > 0$. Expliquer pourquoi il n'existe aucune fonction réelle, T-périodique, continue par morceaux telle que ses coefficients de Fourier soient $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $b_n = 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 2 Soit f la fonction paire, définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x$ pour tout x dans $[0, \pi]$.

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire les valeurs de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3 Montrer que $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique. Donner son développement en série de Fourier. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.

Exercice 4 Soit f la fonction impaire, définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $f(x) = x(\pi - x)$ pour tout x dans $[0, \pi]$.

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire les valeurs de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Remarque. *Les valeurs de $\zeta(2k)$ (si $k \in \mathbb{N}^*$) sont toutes bien connues. En revanche, celles de $\zeta(2k+1)$ restent mystérieuses. On sait seulement (depuis 1963) que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.*

Exercice 5 En se servant de ch, trouver les valeurs de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ et de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}$.

Exercice 6 Soit α dans $\mathbb{R} \notin \mathbb{Z}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout x dans $[-\pi, \pi]$.

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire une formule due à Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \cot(\pi x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

20.2 Grands classiques

Exercice 7 *(inégalité de Wirtinger).* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admettant une dérivée f' continue par morceaux. On suppose que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$. Étudier le cas d'égalité. En déduire que $\|f\|_\infty^2 \leqslant \dfrac{\pi}{6} \displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, \pi[$ et soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

1. Déterminer les séries de Fourier de f et g.
2. En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$.

   Remarque amusante. Il est facile de montrer (ipp) que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

A

Alphabet grec

Α α *alpha*	Β β *bêta*	Γ γ *gamma*	Δ δ *delta*
Ε ε *epsilon*	Ζ ζ *zêta*	Η η *êta*	Θ ϑ *thêta*
Ι ι *iôta*	Κ ϰ *kappa*	Λ λ *lambda*	Μ μ *mu*
Ν ν *nu*	Ξ ξ *ksi*	Ο ο *omicron*	Π π *pi*
Ρ ρ *rhô*	Σ σ *sigma*	Τ τ *tau*	ϒ υ *upsilon*
Φ φ *phi*	Χ χ *khi*	Ψ ψ *psi*	Ω ω *ômega*

Attention à la position des lettres $\beta, \gamma, \mu, \rho, \varphi, \chi, \psi$: elles descendent sous la ligne, comme le font les lettres *p* ou *q*. De plus, en cursif, γ forme une boucle bien visible (ne pas écrire une sorte de y)

La lettre σ s'écrit ς en fin de mot uniquement : cette graphie n'est pas utilisée en sciences.

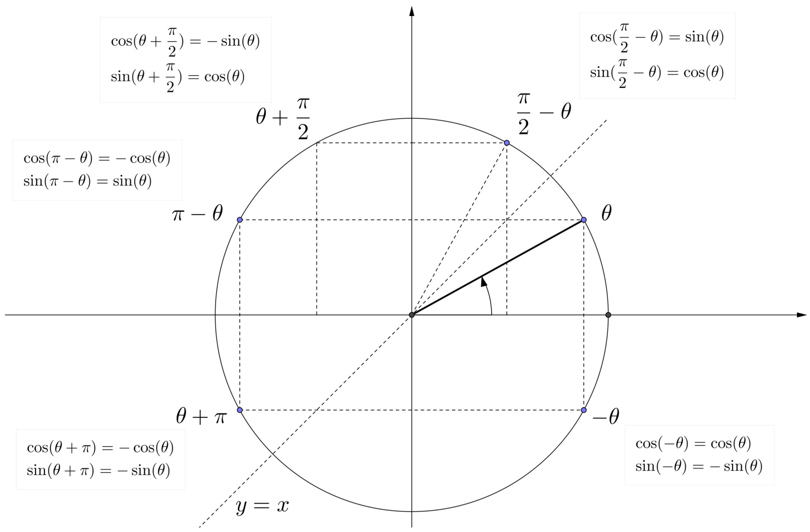
La lettre π s'écrit aussi ϖ, surtout en écriture manuscrite : parfois utilisée en Physique.

Quelques étymologies grecques en Mathématiques.

— μανθάνω : apprendre. Ex : mathématique.
— ἡ μορφή : la forme. Ex : morphisme.
— ἔνδον : à l'intérieur. Ex : endomorphisme.
— ἴσος : égal. Ex : isomorphisme.
— αὐτός : lui-même. Ex : automorphisme.
— πολύς : nombreux. Ex : polynôme.
— μόνος : un seul. Ex : monôme.
— ὑπό : en dessous. Ex : hypothèse.
— ἡ βολή : action de lancer. Ex : parabole.
— παρά : près de, le long de, chez. Ex : parabole.
— τὸ γένος : race, naissance. Ex : générateur.
— ὁ ἀριθμός : le nombre. Ex : arithmétique.
— ὁ τόπος : le lieu. Ex : topologie.
— θεωρέω : contempler. Ex : théorème.
— τὸ εἶδος : l'aspect extérieur. Ex : ellipsoïde.
— ἡ σύμπτωσις : la rencontre. Ex : asymptote.
— ὁ κύκλος : le cercle. Ex : cycloïde.
— τὸ μέτρον : la mesure. Ex : isométrie.
— βαρύς : lourd. Ex : barycentre.
— ὀρθός : droit. Ex : orthogonal.
— ὑπέρ : au dessus. Ex : hyperbole.
— ἐπί : sur. Ex : épimorphisme.
— ἀλλήλων : les uns les autres. Ex : parallèle.
— ὁ τόμος : le morceau coupé. Ex : dichotomie.
— ἡ ἕδρα : Ex : le siège. Ex : polyèdre.
— ὁ χαρακτήρ : l'empreinte. Ex : caractéristique.

B

Formulaire de Trigonométrie circulaire



Relation « de Pythagore ».

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

Formules de transformations.

$$\cos(a + \pi) = -\cos(a) \qquad \sin(a + \pi) = -\sin(a)$$

$$\cos(-a) = \cos(a) \qquad \sin(-a) = -\sin(a)$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$$

$$\cos\left(a + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(a) \qquad \sin\left(a + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$$

Formules d'addition.

« cosinus = non mélange-non respect » et « sinus = mélange-respect ».

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication.

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}.$$

Formules de l'arc-moitié. Si $\vartheta \in\,]-\pi, \pi[$ on pose $t = \tan(\vartheta/2)$. Alors,

$$\cos(\vartheta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad \sin(\vartheta) = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \tan(\vartheta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Formules de linéarisation.

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}.$$

En particulier, $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Formule du déphasage. Si a, b sont des réels,

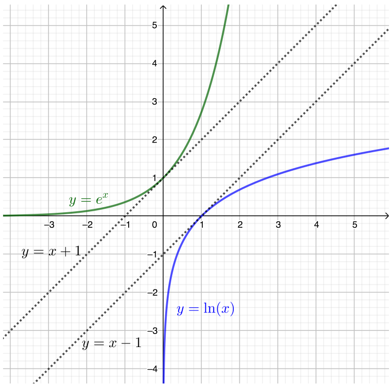
$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x-\vartheta)$$

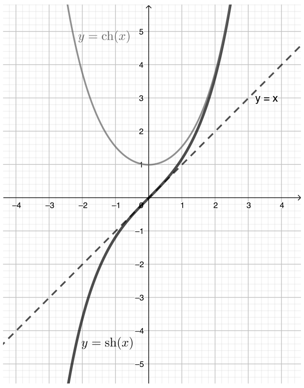
où $r = |a + b\mathrm{i}|$ et $\vartheta = \arg(a + b\mathrm{i})$.

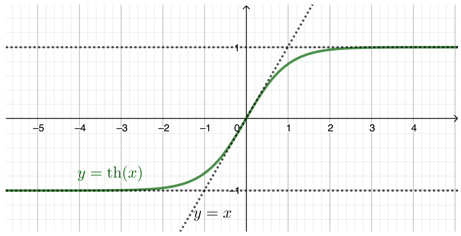
Fonctions usuelles

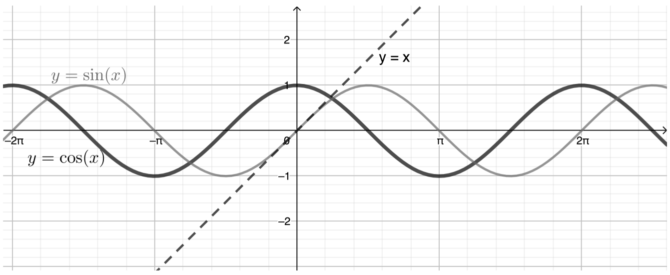
C

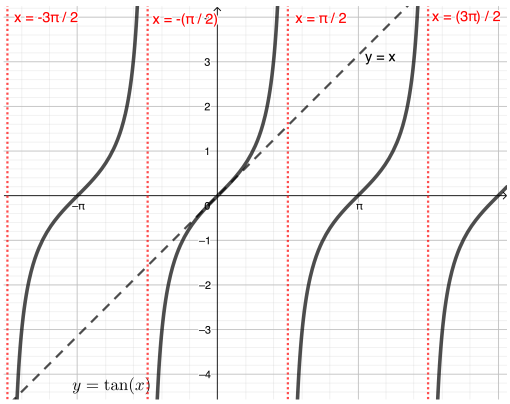
Tracer une courbe demande :
— *des axes proprement dessinés à la règle avec les unités marquées,*
— *de dessiner les tangentes remarquables et asymptotes avant la courbe,*
— *un graphique soigné de la courbe en précisant les intersections avec les axes.*

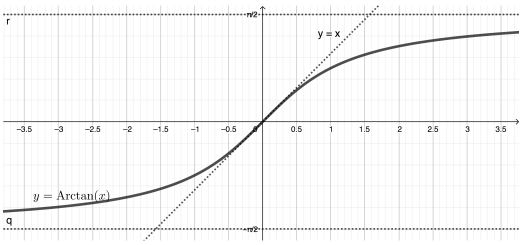


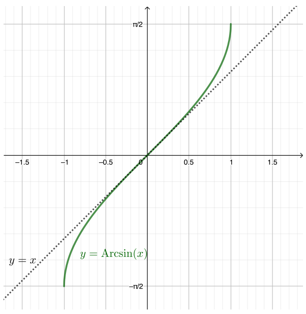


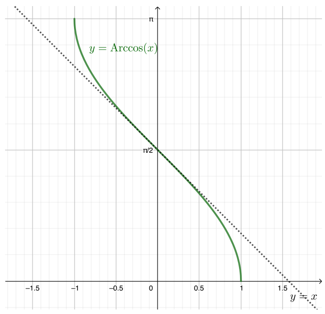












D

Formulaire de dérivées

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$(-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x} \underset{\text{si } x>0}{=} x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x} \underset{\substack{\text{si } x>0 \\ n\in\mathbb{N}^*}}{=} x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}$	$\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

Fonctions hyperboliques

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$	$1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathbb{R}$

Fonctions circulaires

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
$[-1, 1]$	$\mathrm{Arccos}(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$[-1, 1]$	$\mathrm{Arcsin}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Formulaire de primitives

E

La notation (vieillotte et peu rigoureuse) « $\int f(x)\mathrm{d}x$ » désigne une primitive quelconque de la fonction continue f sur un intervalle. **On ne l'utilise que dans des formulaire comme celui qui va suivre : n'écrivez pas des intégrales sans bornes sur vos copies !**

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$	$=$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad (\alpha \neq 1)$
$\int \cos(x)\mathrm{d}x$	$=$	$\sin(x)$	$\int \sin(x)\mathrm{d}x$	$=$	$-\cos(x)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}$	$=$	$\tan(x)$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)}$	$=$	$-\cot(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$	$=$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$	$=$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$
$\int \tan(x)\mathrm{d}x$	$=$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\int \mathrm{th}(x)\mathrm{d}x$	$=$	$\ln(\mathrm{ch}(t))$
$\int \mathrm{ch}(x)\mathrm{d}x$	$=$	$\mathrm{sh}(x)$	$\int \mathrm{sh}(x)\mathrm{d}x$	$=$	$\mathrm{ch}(x)$
$\int \mathrm{e}^{mx}\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{1}{m}\mathrm{e}^{mx}, \quad (m \in \mathbb{C}^*)$	$\int a^x\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{a^x}{\ln(a)}, \ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$=$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$=$	$\underset{=-\mathrm{Arccos}(x)+\frac{\pi}{2}}{\mathrm{Arcsin}(x)}$

Exemple. Pour trouver $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+x^2}$ on écrit $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}$, et on fait le changement de variable $t = \frac{x}{\sqrt{5}}$, qui donne $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5}}$. D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{Arctan}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right).$$

F

Développements en série entière usuels

Les DSE_0 marqués du symbole $(*)$ sont à connaître ou à retrouver rapidement. Les autres sont donnés à titre informatif. On a précisé, pour chaque DSE_0, les premiers termes du développement.

Variable complexe

$(*)$	$\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$	$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$	$\mathrm{R} = +\infty$
$(*)$	$\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$	$\mathrm{R} = 1$

L'égalité $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ n'a lieu que lorsque $|z| < 1$. Il n'a donc aucun sens de dire que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n = \frac{1}{1-2} = -1$. Cette identité est cependant vraie dans d'autres mondes que $\mathbb{C}$: dans le corps ultramétrique $\mathbb{Q}_2$ des nombres 2-adiques par exemple.

Variable réelle

Conséquences du DSE de e^x

$(*)$	$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$	$\mathrm{R} = +\infty$
$(*)$	$\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$	$\mathrm{R} = +\infty$
$(*)$	$\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$	$\mathrm{R} = +\infty$
$(*)$	$\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$	$\mathrm{R} = +\infty$

Conséquences du DSE de $\frac{1}{1-x}$

$(*)$	$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$	$\mathrm{R} = 1$
$(*)$	$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$\mathrm{R} = 1$
$(*)$	$\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$	$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$	$\mathrm{R} = 1$
$(*)$	$\mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$\mathrm{R} = 1$
	$\mathrm{Argth}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$	$\mathrm{R} = 1$

La fonction Arctan a beau être définie sur $\mathbb{R}$, le rayon de convergence de sa série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ vaut 1, et non $+\infty$. Ainsi, l'égalité $\operatorname{Arctan}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ n'a lieu que lorsque $x \in \left]-1,1\right[$ (ailleurs, la série diverge).

Conséquences du DSE de $(1+x)^\alpha$

$(*)$	$(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots$	$\mathrm{R}=1$ si $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ $\mathrm{R}=+\infty$ si $\alpha\in\mathbb{N}$
	$\sqrt{1+x} = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{n!^2 4^n(2n-1)}x^n$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\dots$	$\mathrm{R}=1$
	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}$	$1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\frac{5x^6}{16}+\dots$	$\mathrm{R}=1$
	$\operatorname{Arcsin}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$	$x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\dots$	$\mathrm{R}=1$

Notation. Il est d'usage de noter $\binom{\alpha}{n}$ le nombre complexe $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Par exemple,

$$\binom{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}-1)}{2!} = -\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ et si $n \leqslant \alpha$, on retrouve le célèbre coefficient binomial et le DSE écrit ci-dessus n'est autre que notre bonne vieille formule du binôme (la somme est alors finie).