Le théorème d'Abel radial
Toutes les maths en MP/MPI

Et un peu plus en MP*/MPI*

Vincent Rohart

Théorème d'Abel radial. Si $\sum a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon non nul R, et si $\sum a_n \mathrm{R}^n$ converge, alors $\lim\limits_{x\to \mathrm{R}^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{R}^n$.

Démonstration (hors programme). La clé de la démonstration repose sur la célèbre *transformation d'Abel*, analogue de l'intégration par parties : je l'explique en détail à la page 132 du livre *Toutes les maths en MP/MPI, et un peu plus en MP*/MPI**. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries numériques, alors

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n v_n = u_{\mathrm{N}} \mathrm{V}_{\mathrm{N}} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (u_n - u_{n-1}) \mathrm{V}_{n-1},$$

où $\mathrm{V}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ pour tout entier n.

La suite $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ joue le rôle d'une « primitive » de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (analogue de $\mathrm{V}(x) = \int_0^x v(t)\mathrm{d}t$ chez les fonctions) et $(u_n - u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ joue le rôle de la « dérivée » de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (analogue de $u(x) = \lim\limits_{\mathrm{X}\to x} \frac{u(\mathrm{X})-u(x)}{\mathrm{X}-x}$ chez les fonctions, où ici $\mathrm{X} = n+1$ et $x = n$ car on ne peut pas faire mieux !). Je vous laisse établir cette identité qui ne pose aucun problème si l'on commence par remplacer v_n par $\mathrm{V}_n - \mathrm{V}_{n-1}$ dans la première somme, en isolant bien sûr le terme $n = 0$.

Posons, pour simplifier, $g(t) = f(\mathrm{R}t)$ pour tout $t \in [0,1[$. Ainsi, g est la somme de la série entière $\sum b_n x^n$ où $b_n = a_n \mathrm{R}^n$, série entière de rayon 1, et l'on cherche à montrer que si $\sum b_n$ converge vers ℓ, alors $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t) = \ell$. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$. On constate que

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} b_n t^n - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} b_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (t^n - 1) b_n.$$

En posant $u_n = t^n - 1$ et $v_n = b_n$, la transformation d'Abel nous donne,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} b_n t^n - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} b_n = (t^{\mathrm{N}} - 1)\mathrm{B}_{\mathrm{N}} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (t^n - t^{n-1}) \mathrm{B}_{n-1} = (t^{\mathrm{N}} - 1)\mathrm{B}_{\mathrm{N}} - (t-1) \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} t^{n-1} \mathrm{B}_{n-1}.$$

Puisque $t \in [0,1[$ et $\sum b_n$ converge vers ℓ, on a $\lim\limits_{\mathrm{N}\to\infty} (t^{\mathrm{N}} - 1)\mathrm{B}_{\mathrm{N}} = -\ell$ si bien qu'après passage à la limite $\mathrm{N} \to \infty$ il vient

$$g(t) - \ell = (t-1) \left[\frac{\ell}{1-t} - \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathrm{B}_n \right] = (t-1) \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\ell - \mathrm{B}_n)$$

car on sait tous que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$. Soit alors $\varepsilon > 0$ quelconque : on dispose de $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $|\mathrm{B}_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On peut donc dire, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, que

$$|g(t) - \ell| \leqslant (1-t) \left[\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} t^n |\ell - \mathrm{B}_n| + \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} t^n \frac{\varepsilon}{2} \right] \leqslant (1-t) \left[\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} |\ell - \mathrm{B}_n| + \frac{\varepsilon}{2} \frac{t^{\mathrm{N}}}{1-t} \right] \leqslant (1-t) \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} |\ell - \mathrm{B}_n| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Enfin, $(1-t)\sum_{n=0}^{N-1}|\ell - B_n|$ tend vers 0 quand $t \to 1^-$, donc il existe $t' \in [0,1[$ tel que pour tout $t \in [t',1[$, $(1-t)\sum_{n=0}^{N-1}|\ell - B_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour ces réels t on peut donc dire que $|g(t)-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Finalement, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t' \in [0,1[,\ \forall t \in [t',1[,\ |g(t)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

qui est la traduction exacte de $\lim_{t\to 1^-} g(t) = \ell$. $\square$

Pour une généralisation aux séries complexes voir les ouvrages cités en référence : avec les mêmes hypothèses, **il n'est pas vrai** de dire $\lim_{\substack{z\to R \\ z\in D(0,R)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Pour que la limite soit égale à cette somme, la variable z doit tendre vers R « sans avoir la possibilité de longer le bord du disque $D(0,R)$ ».

La réciproque du théorème d'Abel radial est fausse. En effet, la série entière $\sum(-1)^n x^n$ est de rayon 1, sa somme est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $]-1,1[$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$, pourtant la série $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement (on dit cependant qu'elle converge vers $\frac{1}{2}$ *au sens d'Abel*, cf. page 450).

Cependant, il existe des théorèmes énonçant des réciproques partielles. Par exemple le théorème suivant, hors programme (y compris son énoncé, cf. [2]).

Théorème de Tauber (1897). Si $\sum a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon non nul R telle que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x$ admet une limite finie ℓ en R^-. Si de plus $\boxed{a_n = o(\frac{1}{n})}$, alors la série numérique $\sum a_n R^n$ converge vers ℓ.

On peut même montrer que la condition $a_n = O(\frac{1}{n})$ suffit pour avoir la même conclusion, mais la démonstration est plus difficile (théorème de Hardy-Littlewood, cf. [2]).

Références.

[1] *Suites et séries*, Jean Combes, PUF 2e édition 1995.

[2] *Les maths en tête*, Xavier Gourdon, Ellipses 1994.

Niels H. Abel
(1802-1829)

Alfred Tauber
(1866-1942)

Godefrey H. Hardy
(1877-1947)

John E. Littlewood
(1885-1977)