MATHÉMATIQUES PSI-P2B

Année 2023/24

Devoir libre

à rendre le lundi 8 janvier

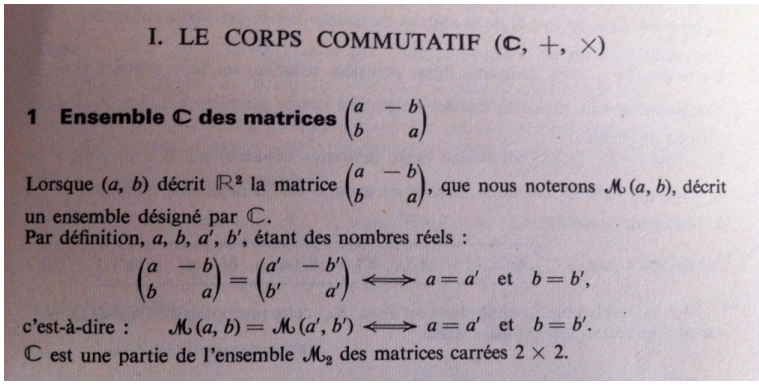
En Terminale on apprend que les nombres réels sont insuffisants d'un point de vue algébrique : des équations simples telles que $x^2+1=0$ n'admettent pas de solution. On construit alors le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes en introduisant un nouvel élément i vérifiant $\mathrm{i}^2=-1$. Ainsi, en usant de la forme canonique, il est facile de montrer que toutes les équations de degré 2 sont résolubles. Un théorème surprenant (de d'Alembert-Gauß) affirme alors que *toutes* les équations polynomiales sont résolubles : $\mathbb{C}$ est un corps *algébriquement clos*.

Puisque $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ sert à faire de la Géométrie plane (écriture complexe des rotations, etc.) le mathématicien écossais Sir W. R. Hamilton (1805-1865) chercha des nombres « à trois dimensions » transcrivant la Géométrie de l'espace, c'est-à-dire chercha une structure de corps sur $\mathbb{R}^3$. Il mit plus de dix ans à comprendre que ce n'était pas possible [1]. La légende raconte qu'il eut l'idée géniale d'en trouver une sur $\mathbb{R}^4$ pendant qu'il traversait l'actuel Broom Bridge à Dublin le 16 octobre 1843 : les quaternions sont nés (lire `http://en.wikipedia.org/wiki/Broom_Bridge`). Leur ensemble se note $\mathbb{H}$ en l'honneur de leur découvreur. Tout comme $\mathbb{C}$, les éléments non nuls de $\mathbb{H}$ sont inversibles. Son seul défaut : ne pas être commutatif, ce qui l'empêche d'être appelé *corps*.

D'abord utilisés en Mécanique quantique, mais vite abandonnés au profit des matrices, les quaternions sont aujourd'hui utilisés en infographie dans la conception des jeux vidéo (animations 3D).

I Les nombres complexes vus comme des matrices

Dans les programmes français de Mathématiques des années 70, les nombres complexes étaient enseignés en Terminales scientifiques (C, D et E), ainsi que les matrices. Dans le manuel de la collection E. Riche (éditions Hatier, 1971), tome 1 on peut lire la définition suivante.



I. LE CORPS COMMUTATIF $(\mathbb{C},+,\times)$

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$ la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, que nous noterons $\mathcal{M}(a, b)$, décrit un ensemble désigné par $\mathbb{C}$.
Par définition, a, b, a', b', étant des nombres réels :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a=a' \text{ et } b=b',$$

c'est-à-dire : $\mathcal{M}(a, b)=\mathcal{M}(a', b') \Longleftrightarrow a=a'$ et $b=b'$.
$\mathbb{C}$ est une partie de l'ensemble $\mathcal{M}_2$ des matrices carrées 2×2.

Nous allons expliquer cette étrange façon de voir les complexes. L'idée est que se donner un nombre z_0 revient à se donner l'opération « multiplication par z_0 ».

1. Pour tout $z_0\in\mathbb{C}$, on note m_{z_0} la multiplication par z_0 c'est-à-dire l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & z\times z_0.\end{array}$
2. Montrer que m_{z_0} est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Si $z_0=a+b\mathrm{i}$ avec a et b réels, déterminer la matrice de m_{z_0} dans la base canonique $(1,\mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$.
3. On définit ainsi une application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à z_0 associe $\mathrm{Mat}_{(1,\mathrm{i})}(m_{z_0})$.
   (a) Montrer que φ est linéaire et injective.
   (b) Montrer que $\varphi(1)=\mathrm{I}_2$ et $\varphi(zz')=\varphi(z)\varphi(z')$ pour tout $(z,z')\in\mathbb{C}^2$: on dit que c'est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de $(\mathbb{C},+,\times,\cdot)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times,\cdot)$.

1. Tous les matins, de 1832 à 1843, son fils lui demandait : *Well, Papa, can you multiply triplets ?* question à laquelle il répondait : *No, I can only add and substract them.*

(c) Pourquoi $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont-elles alors des $\mathbb{R}$-algèbres isomorphes ? Expliquer finalement la définition du livre de Terminale D de 1971.

4. Plus généralement, supposons que l'on dispose d'une $\mathbb{R}$-algèbre $(\mathrm{A}, +, \times, \cdot)$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ telle que tout élément non nul de A admette un inverse. En s'inspirant de ce qui précède, démontrer que $(\mathrm{A}, +, \times, \cdot)$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

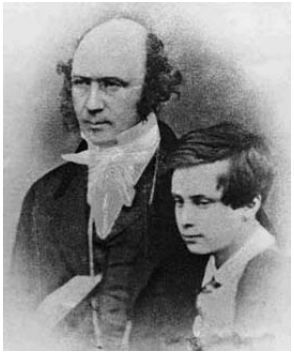
II Le rêve de Hamilton : une structure de corps sur $\mathbb{R}^3$?

Vocabulaire. On appelle $\mathbb{R}$-*algèbre à division* un quadruplet $(\mathrm{A}, +, \times, \cdot)$ où
— $(\mathrm{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
— $\times$ est une application bilinéaire de $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ dans A, appelée *multiplication*.
— $\times$ est associative et possède un élément neutre 1_{A}.
— tout élément non nul de A admet un inverse pour $\times$.
Si en plus $\times$ est commutative, on notera que $(\mathrm{A}, +, \times)$ est alors un corps.

1. Grâce à un argument d'Analyse, expliquer pourquoi toute fonction polynomiale réelle de degré 3 admet au moins une racine réelle.
2. Imaginons un instant qu'il existe une multiplication $\times$ sur $\mathbb{R}^3$ telle que $(\mathbb{R}^3, +, \times, \cdot)$ soit une $\mathbb{R}$-algèbre à division (où $+$ et $\cdot$ sont les lois usuelles de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$).

   Soit $a \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Considérons la multiplication par a : $m_a(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

   Justifier que m_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui possède au moins une valeur propre réelle. Trouver alors une contradiction en considérant un vecteur propre associé.
3. Plus généralement expliquer pourquoi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^{2n+1}$ ne peut posséder de structure de $\mathbb{R}$-algèbre à division. Et si $n = 0$?



Sir W. R. Hamilton, et son fils.

III Les quaternions vus comme des matrices

La partie I explique pourquoi les nombres complexes peuvent se voir comme des matrices réelles 2×2 particulières.

La partie II permet de faire le deuil de trouver une structure d'algèbre à division sur $\mathbb{R}^3$. Nous allons donc généraliser les nombres complexes en tentant de trouver une structure d'algèbre à division sur $\mathbb{R}^4$: d'après la partie I, on sait qu'une telle algèbre est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

On appellera *quaternion* toute matrice carrée réelle 4×4 de la forme

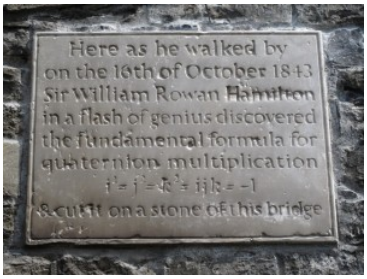
$$\mathrm{M}(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

On posera

$$\mathbf{1} = \mathrm{I}_4 \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin on notera $\mathbb{H}$ l'ensemble des quaternions.

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ en est une base. On notera alors a au lieu de $a\mathbf{1}$ et tout quaternion s'écrit donc $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ avec a, b, c, d des réels.
2. Établir les relations d'Hamilton qu'il a gravées sur le Broom Bridge en 1843 :



3. Déduire de ces relations que $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$ et $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$ et ensuite que $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{ki}$ et $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj}$.
4. Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication. *(On pourra utiliser la question 3).*
5. Si $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ (avec a, b, c, d réels) on pose $\bar{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ et on dit que $\bar{q}$ est le *conjugué* de q.
   (a) Que valent $q\bar{q}$ et $\bar{q}q$?
   (b) En déduire que tout quaternion non nul est inversible et donner son inverse.

   Ainsi, $(\mathbb{H}, +, \times, \cdot)$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre à division de dimension 4.*

6. Montrer que l'application qui à tout z dans $\mathbb{C}$ associe le quaternion $\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)\mathbf{i}$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres (définition donnée en I.3b) injectif.

   Ainsi, on peut voir (abusivement, certes) $\mathbb{C}$ *comme une sous-*$\mathbb{R}$*-algèbre de* $(\mathbb{H}, +, \times, \cdot)$.

7. L'espace usuel $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct. À tout vecteur $\vec{\mathrm{V}}(x, y, z) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ on associe le quaternion (dit « pur ») $q_{\vec{\mathrm{V}}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. On note aussi $\mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ l'ensemble des quaternions purs, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
   (a) Montrer alors que le quaternion produit $q_{\vec{\mathrm{V}}} \times q_{\vec{\mathrm{V}}'}$ vaut

   $$-\langle \vec{\mathrm{V}}, \vec{\mathrm{V}}' \rangle \ + \ q_{\vec{\mathrm{V}} \wedge \vec{\mathrm{V}}'}$$

   où $\langle \vec{\mathrm{V}}, \vec{\mathrm{V}}' \rangle$ est le produit scalaire et $\vec{\mathrm{V}} \wedge \vec{\mathrm{V}}'$ le produit vectoriel de $\vec{\mathrm{V}}$ et $\vec{\mathrm{V}}'$. *C'est cette formule qui permet aux quaternions de décrire la Géométrie de l'espace.* [2]
   (b) À quelle condition sur $\vec{\mathrm{V}}$ et $\vec{\mathrm{V}}'$ le quaternion $q_{\vec{\mathrm{V}}} \times q_{\vec{\mathrm{V}}'}$ est-il un réel ? est-il pur ?
8. La question 2 exhibe trois solutions distinctes de l'équation du second degré $x^2 = -1$: $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$. Elle possède donc, dans $\mathbb{H}$, plus que deux solutions !
   (a) Si K est un corps (commutatif) quelconque et si $a \in \mathrm{K}$, montrer que l'équation $x^2 = a$ (d'inconnue x) admet au plus deux solutions, jamais plus. *On pourra distinguer les cas où cette équation admet ou non une solution, et utiliser une identité remarquable.*

2. Pour les curieux voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternions_et_rotation_dans_l'espace. On y apprend par exemple que l'image d'un vecteur $\vec{\mathrm{V}}$ par la rotation d'angle α et d'axe $\vec{u}$ (avec $\|\vec{u}\| = 1$) est le vecteur associé au quaternion pur $r \times q_{\vec{\mathrm{V}}} \times r^{-1}$ où $r = \cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2}) q_{\vec{u}}$: cf. question 9.

(b) En utilisant la question 7a, montrer que les solutions de $x^2 = -1$ dans $\mathbb{H}$ sont les quaternions purs de norme 1, c'est-à-dire les quaternions de la forme $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ avec x, y, z réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(c) Si on identifie $\mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ et $\mathscr{E}$, quelle figure forment les solutions de l'équation $x^2 = -1$ dans $\mathscr{E}$?

9. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que $\overline{\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})q_{\vec{u}}} = \left(\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})q_{\vec{u}}\right)^{-1}$.

(b) La rotation (vectorielle) d'angle α et d'axe $\vec{u}$ est par définition l'endomorphisme $\mathrm{R}_{\alpha,\vec{u}}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

— la restriction de $\mathrm{R}_{\alpha,\vec{u}}$ à $\mathbb{R}\vec{u}$ soit l'identité (axe des invariants).

— la restriciton de $\mathrm{R}_{\alpha,\vec{u}}$ au plan orthogonal à $\vec{u}$ soit la rotation d'angle α.

Démontrer que l'image par $\mathrm{R}_{\alpha,\vec{u}}$ de tout vecteur $\vec{\mathrm{V}}$ est le vecteur associé au quaternion pur $r \times q_{\vec{\mathrm{V}}} \times r^{-1}$ où $r = \cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})q_{\vec{u}}$.

Remarque. Le théorème de Frobenius (1877) annonce que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ sont les seules $\mathbb{R}$-algèbres à division de dimension finie. Cependant Cayley a trouvé en 1845 une multiplication sur $\mathbb{R}^8$ qui est presque celle d'une algèbre à division : elle n'est hélas pas associative. Les éléments de cette algèbre sont appelés *octonions*, leur ensemble se note $\mathbb{O}$. On n'a donc pas $a(bc) = (ab)c$ en général, mais une associativité affaiblie : $a(ab) = a^2b$ et $(ab)b = ab^2$ si bien que les puissances sont correctement définies. Son existence a une importance en Géométrie.

⋆ ⋆

⋆